ENCYKLOPÄDIE DER ELEMENTAR-MATHEMATIK

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE

VON

H. WEBER

UND

J. WELLSTEIN

I: ELEMENTARE ALGEBRA UND ANALYSIS



M W Hasker



ENCYKLOPÄDIE

DER

ELEMENTAR-MATHEMATIK.

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE.

VON

HEINRICH WEBER
PROFESSOR IN STRASSBURG

UND

JOSEF WELLSTEIN
PROFESSOR IN GIESSEN.

ERSTER BAND.

ELEMENTARE ALGEBRA UND ANALYSIS.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ENCYKLOPÄDIE

DER

ELEMENTAREN ALGEBRA UND ANALYSIS.

BEARBEITET

VON

HEINRICH WEBER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Vorrede.

Das Buch, dessen erster Band hiermit in die Öffentlichkeit tritt, soll kein Schulbuch im eigentlichen Sinne des Wortes sein. Die Leser, an die wir uns wenden, sind einerseits die Lehrer, die, wie wir hoffen, darin Anregung finden mögen, ihren Unterrichtsstoff sachgemäß auszuwählen und, namentlich in den höheren Klassen, zu vertiefen; andererseits Studierende, die bei ihren Berufsstudien die höhere Mathematik betreiben, und dabei eine Anlehnung an die Elemente und Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse suchen.

Es ist unmöglich, nach einem wissenschaftlichen Gesichtspunkt den Begriff der Elementarmathematik scharf abzugrenzen. Wenn man, wie wohl versucht worden ist, die Elementarmathematik da aufhören läßt, wo der Grenzbegriff einsetzt, so erhält man zwar in der Arithmetik ein gut abgegrenztes Gebiet, das so ziemlich die ganze Zahlentheorie enthalten könnte, das sogar, konsequent weitergebildet, zu alle dem führen könnte, was nach Kroneckers Ansicht in der Mathematik überhaupt legitim ist. Aber bereits die Irrationalzahlen, also schon Quadratwurzeln und Logarithmen, müßten davon ausgeschlossen werden. Andrerseits muß man aber in der Geometrie doch alles das zu den Elementen rechnen, was der Konstruktion mit Lineal und Zirkel zugänglich ist, und da läßt sich, wenn man eine Verbindung zwischen Arithmetik und Geometrie anstrebt, die Quadratwurzel nicht vermeiden.

Es wird also die Abgrenzung des Stoffes der Elementarmathematik durch äußere Gründe, besonders auch durch pädagogische Rücksichten bestimmt werden, und wir sind sicher, daß darin jeder erfahrene Lehrer mit uns übereinstimmen wird.

Weniger leicht aber ist eine Übereinstimmung der Meinungen über die beste Auswahl und Begrenzung des Stoffes zu erwarten. Diese werden und müssen von der Individualität und wissenschaftlichen Neigung des Lehrers, von der Beschaffenheit des Schülermaterials, vor allem aber auch von den Zielen und Aufgaben abhängen, die sich der Unterricht stellt.

Sieht man es als die vornehmste Aufgabe der wissenschaftlichen Erziehung an, dem Geiste eine allseitig harmonische Ausbildung zu geben, die in ihm schlummernden Kräfte zu wecken und zu üben und ihn zu einer höheren Auffassung des Lebens zu befähigen, so wird die Einrichtung des Unterrichts eine andere sein müssen, als wenn es sich darum handelt, eine gewisse Summe nützlicher Kenntnisse und Fertigkeiten auszubilden, die den Jüngling so früh wie nur möglich gerüstet und kampfbereit der harten Notwendigkeit des Lebens gegenüberstellen.

Der zuletzt genannte Zweck drängt dahin, den Stoff des Unterrichts auszudehnen, möglichst viel den Elementen zuzuweisen, damit das spätere Fachstudium sich nicht bei den vorbereitenden Disziplinen aufzuhalten braucht, und gleich bei seinem speziellen Gegenstand einsetzen kann.

Es liegt aber auf der Hand, daß dies nur auf Kosten der Tiefe und Gründlichkeit möglich ist, und die Gefahr besteht, daß dabei der eigentliche Bildungswert des mathematischen Unterrichts nicht voll zur Geltung kommt.

Dieser letztere ist zudem für die verschiedenen Individualitäten ein sehr verschiedener. Die mathematische Produktion hat etwas von künstlerischer Tätigkeit an sich, und zwar nicht bloß die eigentliche schöpferische Tätigkeit, sondern auch die Produktion im kleinen, die sich in der Lösung von Aufgaben oder auch nur beim genauen Verstehen mathematischer Gedankenfolgen zeigt. Sie kann durch ihre Anschaulichkeit den Geist vollständig gefangen nehmen, und ist dem dafür Organisierten eine Quelle reichsten Genusses. Und dies gilt nicht minder von der abstrakten Anschauung im Reiche der Zahlen, als von den Raumanschauungen der Geometrie.

Es ist mir daher auch nicht zweifelhaft, daß für einen im höchsten Sinne erfolgreichen mathematischen Unterricht eine gewisse spezifische Begabung erforderlich ist, womit nicht bestritten werden soll, daß es sehr wohl möglich und für die logische Zucht des Denkens notwendig ist, einem jeden normal begabten Schüler ein mathematisches Wissen und Verstehen in gewissem Umfang zu gewähren, die ihm bei jedem künftigen Studium von Nutzen sind.

In dem Zwiespalt dieser doppelten Aufgabe liegt wohl die größte Schwierigkeit, mit der der mathematische Unterricht zu kämpfen hat, und dem Lehrer, der diese beiden Aufgaben in richtiger Weise vereinigen soll, müssen nicht nur gründliche Kenntnisse, sondern tiefere mathematische Bildung und feines Gefühl für die Schönheit der Mathematik zu Gebote stehen.

Noch heute, nach bald 50 Jahren, gedenke ich mit Dankbarkeit meines Lehrers am Heidelberger Lyceum, Arneth, und der An-

regung und Förderung, die mir sein Unterricht gewährte[1]). So wenig es ihm gegeben war, die Masse der Schüler zu fördern, um so hinreißender war sein Unterricht für einzelne, denen sein feiner mathematischer Sinn und seine tiefe, der Zeit vorauseilende Auffassung der Physik verständlich war.

Die Mathematik hatte in jener Zeit an den süddeutschen Gymnasien im Unterrichtsplan eine untergeordnete Stellung und geringes Ansehen bei den übrigen Lehrern und bei der Mehrzahl der Schüler. Eine nachhaltige Einwirkung war daher nur bei dem kleinen Kreis der mathematisch veranlagten Schüler möglich. Das ist jetzt überall besser geworden, und daß ein Schüler ohne jedes Verständnis durch die mathematischen Lehrstunden geht und schließlich doch als reif entlassen wird, kommt jetzt wohl kaum noch vor.

Es ist dies ein unverkennbarer Fortschritt; nur darf er nicht auf Kosten des innern Gehaltes gemacht werden, damit auch der mathematisch tiefer Angelegte bei dem neuen Systeme noch zu seinem Rechte kommt. Dies geschieht aber nicht dadurch, daß man die bessern Schüler möglichst weit über die Grenzen der Elementarmathematik hinaus in das Gebiet der höheren Analysis führt. Dadurch werden künftige gründliche mathematische Studien eher gehemmt als gefördert. Viel fruchtbarer, bildender und belebender ist die Vertiefung des Inhalts des elementaren Unterrichtes, der innerhalb der alten Grenzen einen unerschöpflichen Reichtum an Stoff bietet.

Es soll hier dem Lehrer vollkommene Freiheit gelassen werden, unter dieser Fülle je nach seiner wissenschaftlichen Neigung die Auswahl zu treffen. Denn nur da kann eine fruchtbare Einwirkung auf den Schüler erwartet werden, wo auf der Seite des Lehrers selbst noch Interesse an dem Gegenstand des Unterrichts lebendig ist.

Es ist bei der Bearbeitung unseres Buches Gewicht auf eine strenge Entwicklung der logischen Voraussetzungen gelegt, in deren Erkenntnis, sowohl für die Arithmetik als für die Geometrie, uns die Forschung der letzten Jahrzehnte wesentlich gefördert hat. Für eine strenge und einfache Auffassung des Zahlbegriffes ist besonders von den Schriften von Dedekind „Was sind und was sollen die Zahlen“ (Braunschweig 1888, 1892), „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (1872, 1892) eine fruchtbare Anregung ausgegangen. Auf diese Schriften stützen sich auch die Betrachtungen dieser ersten Abschnitte. Diese Partien, die sich nur an den gesunden Menschenverstand wenden und zum Verständnis keinerlei mathematische oder philosophische Spe-

---

1) Arthur Arneth, 1802—1858. Auch literarisch ist sein Name nicht unbekannt, und seine Arbeiten, besonders auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik, sind noch heute anerkannt.

zialkenntnisse verlangen, finden ihre Stelle sachgemäß am Eingang. Gleichwohl wird zu ihrer richtigen Auffassung eine gewisse Reife des Urteils vorausgesetzt und daher dürfte dem noch nicht vollständig Eingeweihten zu raten sein, das Studium des Buches mit den späteren Kapiteln zu beginnen, die den eigentlich mathematischen Stoff enthalten.

Es dürfte wohl möglich sein, in einer gut vorgebildeten Prima einige dieser prinzipiellen Fragen in Form einer philosophischen Propädeutik zu behandeln. Doch ist dabei Vorsicht anzuraten, denn ein halbes Verständnis ist hierbei so gut oder schlimmer wie gar keines.

Für die Mehrzahl der Schüler wird es weit nützlicher und anregender sein, wenn der Unterricht nach der Seite der Anwendungen hin ausgebildet wird, wozu ja durch die neue preußische Prüfungsordnung für Oberlehrer ein erfreulicher Anstoß gegeben ist. Diese Anwendungen können zur Belebung des mathematischen Unterrichtes viel beitragen, fördern das Interesse und können auch durch Pflege des Zeichnens und die der Mathematik so wohl anstehende Genauigkeit und Sorgfalt in der Ausführung des Kleinen und Einzelnen den erzieherischen Wert dieses Unterrichtszweiges steigern.

Im Laufe der Arbeit hat sich der Stoff vermehrt und der Plan erweitert; es erschien daher zweckmäßig, statt zweier, wie ursprünglich beabsichtigt, drei handliche Bände zu machen, deren erster das arithmetische und analytische Gebiet, der zweite die Geometrie und der dritte die Anwendungen enthalten soll. Wir hoffen, daß die beiden folgenden Bände dem ersten in kurzer Zeit folgen werden. Es ist auf diese Weise möglich geworden, den Anwendungen etwas weiteren Spielraum zu geben, auf die auch schon bei der Auswahl der Beispiele Rücksicht genommen ist.

Übrigens sind wir, dem Plane unsers Werkes entsprechend, in der Behandlung von Beispielen sparsam gewesen. Beispiele, die bloß dem Zweck der Übung dienen, konnten wir um so eher unberücksichtigt lassen, da wir an trefflichen und reichhaltigen Aufgabensammlungen dieser Art keinen Mangel haben. Beispiele sind nur da behandelt, wo es zum Verständnis notwendig schien, oder wo ein Beispiel ein eigenes wissenschaftliches Interesse bot. Ebenso haben wir die historischen und literarischen Angaben sehr eingeschränkt. Wir besitzen jetzt das große Werk von M. Cantor über die Geschichte der Mathematik, in der man über die Zeit von den ersten Anfängen bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts eingehende und gründliche Belehrung findet, und durch das sorgfältige Register auch über jede Einzelfrage schnell Auskunft erhält. Außerdem wird der Artikel über „Elementarmathematik“ von Max Simon, der demnächst in der „Encyklopädie der math. Wissenschaften“ er-

scheinen wird, den wir im Manuskript einsehen durften, sehr zuverlässige und vollständige historische und literarische Angaben über alle Fragen bringen, die zur Elementarmathematik gerechnet werden können. Mit Rücksicht hierauf schien es uns zu genügen, wenn bei jedem vorkommenden Eigennamen, der etwa zur Benennung eines Lehrsatzes dient, in einer kurzen Note auf die Lebenszeit und Lebensumstände des betreffenden Autors hingewiesen ist.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß unsere Arbeit einer Anregung des Verlegers, Herrn Alfred Ackermann-Teubner, ihre Entstehung verdankt, der uns auf die jetzt vollständig vergriffenen „Elemente der Mathematik“ von Baltzer hinwies, die in mehreren Auflagen verbreitet sind, also gewiß einem Bedürfnis der mathematischen Welt entsprechen. Ein solches Werk vom Standpunkt der heutigen Wissenschaft neu zu bearbeiten erscheint daher als eine dankbare Aufgabe, die ich um so lieber übernahm, als ich seit dem Jahre 1888 in Marburg, Göttingen und Straßburg unter dem Titel „Encyklopädie der Elementarmathematik“ Universitäts-Vorlesungen mit den gleichen Zielen eingerichtet hatte.

Straßburg, im Juli 1903.

H. Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch.

Grundlagen der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

Dritter Abschnitt.

Division und Einführung der Brüche.

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginäre Zahlen.

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

Zweites Buch.

Algebra.

Elfter Abschnitt.

Algebraische Gleichungen.

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grades.

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

Sechzehnter Abschnitt.

Algebraische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

Drittes Buch.

Analysis.

Zwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Seite

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Produkte.

Sechsundzwanzigster Abschnitt.

Transcendenz von e und π.

Zusätze.

ERSTES BUCH.

GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK.



Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

§ 1. Einheiten, Mengen.

1. Es ist dem Menschengeist die Fähigkeit gegeben, unter der Flut ineinander spielender Eindrücke, Empfindungen, Vorstellungen, Gedanken eine gewisse Gruppe gegen alle anderen abzugrenzen und als eine Einheit, ein Ding aufzufassen. Diese Abgrenzung steht durchaus in unserer Willkür; wir lassen uns dabei aber von Zweckmäßigkeitsgründen leiten. Wenn wir uns mit anderen kurz verständigen wollen, geben wir einem solchen Ding einen Namen. Der Begriff der Einheit ist aber keineswegs auf solche Dinge beschränkt, die in den Kultursprachen Namen haben, auch nicht auf körperliche, konkrete Dinge. Mit dem Begriff der Einheit ist aber zugleich der der Vielheit (Mehrheit) gegeben.

2. Ein weiterer Schritt in unserer Gedankenbildung ist die Auffassung einer Mehrheit von Dingen und ihre Zusammenfassung zu einer neuen Einheit, die wir eine Einheit höherer Ordnung, ein System, eine Klasse, eine Gattung oder auch eine Menge nennen. Die Einzeldinge eines solchen Systems heißen ihre Elemente.

Auch die Bildung dieser Klassen ist willkürlich. Eine Klasse wird wohl definiert sein, wenn von jedem Ding entschieden ist, ob es der Klasse angehört oder nicht. Wir sind nicht gehindert, die verschiedenartigsten Dinge in eine Klasse zu vereinigen; wir lassen uns aber auch hier vorzugsweise durch den Zweck leiten, der in nichts anderem besteht, als die Welt unserer Vorstellungen zu verstehen und uns mit unseren Mitmenschen zu verständigen. Wir vereinigen vorzugsweise zu einer Klasse solche Dinge, die in unserer Vorstellung eine gewisse Ähnlichkeit, Verwandtschaft haben, und für viele dieser Klassen hat die Sprache Namen — Gattungsnamen — gebildet. Eine Sprache wird um so vollkommener entwickelt, um so reicher sein, je weiter sie in der Bildung solcher Gattungen fortgeschritten ist.

Häufig vorkommende Gattungen verdichten sich in unserer Vorstellung zu Begriffen, bei denen wir nicht mehr an die Vielheit denken, und wir gewinnen dadurch neue Einheiten. Wir schaffen so Dinge, denen wir auch objektiv eine gewisse Wirklichkeit zuschreiben, die Ideen. Dies ist am schlagendsten bei den Zahlbegriffen, die, so kompliziert ihre ursprüngliche Definition ist, schließlich in unserem Vorstellen zu einfachen Dingen werden.

§ 2. Verknüpfung, Mächtigkeit.

1. Die dritte Tätigkeit unseres Geistes ist die Verknüpfung von Dingen untereinander. Jedes Urteil, jede Aussage, die über die bloße Nennung eines Namens hinausgeht, ist eine solche Verknüpfung. Aber auch hier sind wir vollkommen frei, irgend welche Dinge miteinander zu verknüpfen. Eben durch diesen geistigen Akt erlangen sie eine Beziehung zueinander.

Aber in einer guten und zweckmäßigen Herstellung solcher Verbindungen besteht aller Fortschritt unserer Erkenntnis.

In unseren allgemeinen Erörterungen bezeichnen wir die Mengen durch große lateinische Buchstaben. Sind A und B solche Mengen, so können wir versuchen, jedes Element der Menge A mit einem bestimmten Element der Menge B so zu verknüpfen, daß niemals zwei verschiedene Elemente der Menge A mit demselben Element von B verbunden sind. Eine solche Verknüpfung nennen wir eine Abbildung der Menge A auf die Menge B. Die Elemente von A mögen hierbei die Originale und die entsprechenden Elemente von B ihre Bilder genannt werden.

Von welchem Nutzen eine solche Abbildung sein kann, leuchtet ein; denn wenn wir die Menge B in unseren Gedanken vollständig beherrschen, so wird durch eine solche Abbildung eine zuvor unübersichtliche, ungeordnete Menge unserem Begriffssystem eingeordnet; jedes Element von A erhält gewissermaßen einen Eigennamen.

2. Die Abbildung ist eine gegenseitige, wenn bei der Verknüpfung jedes Element von B Verwendung gefunden hat, wenn also auch umgekehrt jedes Element von B mit einem und nur mit einem Element von A verknüpft ist. In diesem Fall nennen wir die Abbildung von A auf B eindeutig.

Mengen, die in dieser Weise aufeinander eindeutig abgebildet werden können, heißen von gleicher Mächtigkeit.

Es ist bei alle dem nicht ausgeschlossen, daß die Mengen A und B miteinander identisch sind; man kann also auch von einer Ab-

bildung einer Menge auf sich selbst reden. Dabei kann ein Element von A mit sich selbst oder auch mit einem anderen Element von A verbunden sein. Ist jedes Element von A mit sich selbst verbunden, so ist die Abbildung jedenfalls eindeutig, und daher ist jede Menge mit sich selbst von gleicher Mächtigkeit.

Zu beachten ist aber bei der Abbildung einer Menge auf sich selbst, daß hier ein Element einmal als Original, das andere Mal als Bild mit einem anderen verbunden ist, und daß diese voneinander verschieden sein können.

Beispiele von Mengen gleicher Mächtigkeit sind die Finger der einen und der anderen Hand, oder die Punkte einer Strecke und die Punkte einer zweiten Strecke. Um letzteres einzusehen, denke man sich die Strecken mit je einem Endpunkt aneinander gelegt, und die beiden anderen Endpunkte durch eine gerade Linie verbunden. Dann verknüpfe man je zwei Punkte miteinander, die von denselben Parallelen zu dieser Geraden getroffen werden.

3. Wenn die Menge A mit B und B mit C von gleicher Mächtigkeit ist, so ist auch A mit C von gleicher Mächtigkeit. Denn wenn ein beliebiges Element a aus A mit einem bestimmten Element b aus B und ebenso wieder mit einem bestimmten Element c aus C verbunden ist, so ist eben dadurch auch a mit c verbunden, und dasselbe gilt auch umgekehrt, wenn man von einem beliebigen Elemente aus C ausgeht.

4. Ist A eine beliebige Menge, so gibt es immer noch Dinge β, die nicht in A enthalten sind. Ein solches Ding β können wir uns z. B. auf folgende Art verschaffen: Haben wir irgend welche Dinge $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ zu der Menge A vereinigt, so ist diese Menge selbst, als Ding aufgefaßt, von den Elementen $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ verschieden und also ein nicht in A enthaltenes Ding.

Dies gilt selbst dann noch, wenn A aus einem einzigen Element besteht. Denn der Gedanke „α bildet ein System für sich“ ist etwas von α Verschiedenes[1]).

5. Fügen wir ein solches nicht in A enthaltenes Element β zu A hinzu, so schaffen wir dadurch eine neue Menge B, die wir zweckmäßig so bezeichnen können:

$$B = A + \beta, \tag{1}$$

indem wir mit + (plus) die Operation der Hinzufügung andeuten

---

1) Die „Menge aller Dinge“, die Dedekind zum Beweis der Existenz unendlicher Mengen benutzt hat, erscheint hiernach nicht unter dem Mengenbegriff, wie wir ihn hier fassen.

und mit dem Zeichen = (gleich) ausdrücken, daß die dadurch miteinander verbundenen Zeichen dasselbe Ding bezeichnen sollen.

Ebenso können wir, wenn die Menge A mehr als ein einziges Element enthält, eine neue Menge dadurch bilden, daß wir ein Element α aus A entfernen, und die übrig bleibenden Elemente als Menge B auffassen. Hierfür wollen wir das Symbol

$$B = A - \alpha \tag{2}$$

brauchen, indem wir durch — (minus) die Operation des Ausscheidens andeuten.

Unter einem Teil der Menge A verstehen wir eine Menge A', deren Elemente alle unter den Elementen von A enthalten sind.

Demnach ist auch die Menge A ein Teil von sich selbst. A' heißt ein echter Teil von A, wenn A' nicht mit A identisch ist, wenn also A zwar alle Elemente von A' aber außerdem noch andere enthält.

Ist A' ein echter Teil von A, so wollen wir unter

$$A - A'$$

die Menge verstehen, die übrig bleibt, wenn aus A alle Elemente von A' entfernt sind. Ebenso wollen wir, wenn A und B Mengen sind, unter $A + B$ die Menge verstehen, die alle Elemente von A sowohl als von B und keine anderen enthält.

Wenn A und B gemeinschaftliche Elemente enthalten, so ist die Gesamtheit dieser gemeinsamen Elemente wieder eine Menge, die wir, mit einem Anklang an geometrische Vorstellungen, den Durchschnitt von A und B nennen. Mengen, die kein gemeinsames Element enthalten, haben auch keinen Durchschnitt.

Sind alle Elemente von B zugleich in A enthalten, so ist B selbst der Durchschnitt von A und B. In diesem Falle ist $A + B = A$. Ist aber der Durchschnitt D von A und B ein Teil von B, so hat $B - D$ kein Element mit A gemein, und es ist

$$A + B = A + (B - D). \tag{3}$$

Hier soll die Klammer bei $(B - D)$ bedeuten, daß diese Menge als Ganzes zu A hinzugefügt werden soll. Die Bedeutung von $A + (B - D)$ ist also eine ganz andere, als die von $(A + B) - D$. Das erste Zeichen bedeutet den Inbegriff aller Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind, während das zweite den Inbegriff der Elemente bedeutet, die entweder in A oder in B aber nicht in beiden enthalten sind. Dagegen ist, wenn A, B, C Mengen sind,

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{4}$$

und

(5) $$A + B = B + A.$$

Ebenso, wenn die Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente haben und die Menge C ein Teil von B ist,

(6) $$(A + B) - C = A + (B - C),$$

und wenn B ein Teil von A, C ein Teil von B ist,

(7) $$A - (B - C) = (A - B) + C.$$

6. Sind A und B Mengen von gleicher Mächtigkeit, und ist α ein nicht in A, β ein nicht in B enthaltenes Element, so sind auch die Mengen $A + \alpha$ und $B + \beta$ von gleicher Mächtigkeit.

Denn wenn die Elemente von A eindeutig verknüpft sind mit den Elementen von B, so brauchen wir nur noch α mit β zu verknüpfen, um eine eindeutige Verknüpfung von $A + \alpha$ mit $B + \beta$ zu erhalten.

Wenn alle Elemente einer Menge B zugleich in der Menge A enthalten sind, so sagen wir, B ist in A enthalten. Es ist dann B entweder mit A identisch oder ein Teil von A.

Es gilt nun der Satz:

7. Ist die Menge A von gleicher Mächtigkeit wie B und α ein Element in A, β ein Element in B, so ist auch $A - \alpha$ von gleicher Mächtigkeit wie $B - \beta$.

Denn wenn A und B von gleicher Mächtigkeit sind, so gibt es eine eindeutige Abbildung von A auf B. Wenn bei dieser Abbildung α mit β verbunden ist, so sind offenbar, wenn man dieses Paar entfernt und die übrigen Verbindungen alle bestehen läßt, auch $A - \alpha$ und $B - \beta$ aufeinander eindeutig abgebildet. Ist aber α mit einem von β verschiedenen Element β' in B, und folglich auch β mit einem von α verschiedenen Element α' in A verbunden, so lassen wir alle übrigen Verknüpfungen ungeändert, verbinden α' mit β' und werfen α und β hinaus. Dadurch sind dann wieder die Mengen $A - \alpha$ und $B - \beta$ aufeinander eindeutig abgebildet, und diese Mengen sind also, wie bewiesen werden sollte, von gleicher Mächtigkeit.

§ 3. Zahlen und Zählen.

1. Nach dem Vorhergehenden können wir alle die Mengen, die mit einer von ihnen und folglich (§ 2. 3.) auch untereinander von gleicher Mächtigkeit sind, zu einem System, einer Gattung vereinigen, und diese Gattung findet wegen ihrer großen Allgemeinheit die allerhäufigste Anwendung. Diese Gattungen heißen Zahlen. Die

Namen, die den einzelnen dieser Gattungen beigelegt werden, sind die Zahlwörter, die Zeichen, durch die wir sie in der Schrift bezeichnen, die Zahlzeichen. Ist a das Zeichen oder der Name einer solchen Gattung, der eine Menge A angehört, so sagen wir auch, a ist die Anzahl der Elemente von A oder A besteht aus a Elementen oder auch kurz a ist die Zahl von A oder auch a ist der Wert dieser Zahl oder A hat die Mächtigkeit a.

Jede Zahl ist vollständig bestimmt durch eine einzelne aus der Gattung herausgegriffene Menge, die wir einen Repräsentanten der Gattung nennen.

Bei dieser Anschauung ist die Zahl nicht ein inhaltleeres Zeichen, mit dem unser Geist nach gewissen selbstgeschaffenen Regeln spielt, sondern ein inhaltreicher Gattungsbegriff, zu dem wir durch die praktischen Bedürfnisse unseres Geistes und durch seine Beziehung zu der Außenwelt gedrängt werden.

Alle nur aus einem einzigen Element bestehenden Mengen sind von gleicher Mächtigkeit. Sie bilden also eine Gattung, deren Zahl „Eins" heißt und mit dem Zeichen „1" bezeichnet wird.

2. Ist A eine Menge von der Zahl a, und α ein nicht in A enthaltenes Element, so bezeichnen wir die Zahl von $A + \alpha$ mit $a + 1$. Diese Zahl $a + 1$ bleibt ungeändert, wenn A durch einen anderen Repräsentanten von a oder α durch ein anderes Element ersetzt wird (§ 2, 6.).

Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß A und $A + \alpha$ von gleicher Mächtigkeit sind, daß also a und $a + 1$ dieselbe Zahl ist.

3. Wenn die Zahl e von $e + 1$ verschieden ist, so heißt e eine endliche Zahl. Eine Zahl ω, die mit $\omega + 1$ identisch ist, heißt unendlich.

Die Zahl 1 ist eine endliche Zahl. Hierfür berufen wir uns auf den Augenschein, daß wir zwei Dinge (wie 1, 1) nicht eindeutig mit einem Ding 1 verknüpfen können. Die Zahl $1 + 1$ oder 2 ist also von 1 verschieden.

Ist die Zahl e endlich, so ist auch $e + 1$ endlich.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Satze (§ 2, 7.).

Denn sind A, $A' = A + \alpha$, $A'' = A + \alpha + \beta$ Repräsentanten der Zahlen e, $e + 1$, $e + 1 + 1$, so ist, wenn A' und A'' von gleicher Mächtigkeit sind, nach jenem Satze auch A und A' von gleicher Mächtigkeit, also e nicht endlich.

4. Wir betrachten Mengen Z, deren Elemente Zahlen sind (Zahlenmengen), die wir durch folgende beiden Eigenschaften definieren:

α) Die Zahl 1 ist in Z enthalten.

β) Wenn z eine in Z enthaltene Zahl ist, so ist auch $z+1$ in Z enthalten.

Diese doppelte Eigenschaft kommt jedenfalls der Menge zu, die aus sämtlichen Zahlen besteht. Es kann aber auch noch andere Mengen von dieser Eigenschaft geben.

Wir definieren nun die natürliche Zahlenreihe N als den Durchschnitt aller Mengen Z von den Eigenschaften α), β), d. h. wir nehmen in N alle Zahlen und nur diese auf, die in den sämtlichen Mengen Z zugleich enthalten sind.

Nach dieser Definition ist jedenfalls die Zahl 1 in N enthalten, und wenn n irgend eine in N enthaltene Zahl ist, so ist auch $n+1$ in N enthalten. Wir nennen diese Zahlen n auch die natürlichen Zahlen.

5. Jede natürliche Zahl ist endlich, d. h. wenn n eine natürliche Zahl ist, so ist n von $n+1$ verschieden.

Denn nach **3.** genügt die Menge E aller endlichen Zahlen den Bedingungen α), β). Es ist also E in Z und folglich N in E enthalten.

Ob auch das Umgekehrte gilt, d. h. ob jede endliche Zahl in der natürlichen Zahlenreihe enthalten ist, muß einstweilen dahingestellt bleiben.

Aus der natürlichen Zahlenreihe leiten wir speziellere Zahlenreihen auf folgende Weise ab.

6. Es sei a eine natürliche Zahl und Z_a eine Zahlenmenge, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

α') Die Zahl $a+1$ ist in Z_a enthalten.

β') Ist z eine in Z_a enthaltene Zahl, so ist auch $z+1$ in Z_a enthalten.

Diesen Bedingungen genügt die natürliche Zahlenreihe N selbst. Es kann aber auch andere solche Zahlenmengen geben. Wir wollen jede solche Menge eine Z_a nennen. Wir definieren die Menge N_a als den Durchschnitt aller Z_a. Es ist dann N_a in jedem Z_a enthalten.

Nach diesen Bestimmungen sind die Mengen Z_{a+1} durch die Eigenschaften definiert:

α'') Die Zahl $a+2$ ist in Z_{a+1} enthalten.

β'') Ist z eine in Z_{a+1} enthaltene Zahl, so ist auch $z+1$ in Z_{a+1} enthalten.

(Hierin ist der Kürze wegen $a+2$ für $(a+1)+1$ gesetzt.) Daraus ergibt sich, daß jedes Z_a zugleich ein Z_{a+1} ist. Wenn Z_{a+1} die Zahl $a+1$ enthält, so ist es zugleich ein Z_a. Enthält aber Z_{a+1}

die Zahl $(a+1)$ nicht, so erhält man durch Hinzufügen der Zahl $(a+1)$ zu Z_{a+1} ein Z_a. Dies lässt sich in der Bezeichnung des § 2 so ausdrücken:

(1) $$Z_a = Z_{a+1} + (a+1).$$

Hieraus läßt sich leicht der Satz beweisen:

7. Entfernt man aus der Menge N_a die einzige Zahl $(a+1)$, so bleibt die Menge N_{a+1}.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es sei N_a' die Zahlenmenge, die aus N_a durch Entfernung des Elementes $(a+1)$ entsteht, also

$$N_a' = N_a - (a+1).$$

Diese Menge N_a' genügt den Bedingungen α''), β'') und ist also ein Z_{a+1}.

Andererseits ist aber N_a' in jedem Z_{a+1} enthalten. Denn angenommen, es existiere ein Z_{a+1}, in dem N_a' nicht enthalten ist, so gibt es eine Zahl z in N_a', die nicht in Z_{a+1} enthalten ist. Da N_a' das Element $(a+1)$ nicht enthält, so ist auch diese Zahl z nicht gleich $(a+1)$. Sie ist also zwar in $N_a' + (a+1)$ d. h. in N_a, nicht aber in $Z_{a+1} + (a+1)$ enthalten. Nach (1) ist aber $Z_{a+1} + (a+1)$ ein Z_a, und es existiert also ein z, das zwar in N_a, aber in einem Z_a nicht enthalten ist. Dies widerspricht der Definition von N_a, und der Satz **7.** ist also bewiesen.

8. Ebenso entsteht N_1 dadurch aus der natürlichen Zahlenreihe N, daß man das einzige Element 1 hinauswirft.

Hieraus folgt noch

9. Die Zahl a ist in N_a nicht enthalten.

Denn wäre a in N_a enthalten, so wäre $N_a - a$ auch noch ein Z_a, müßte also N_a enthalten.

10. Ist die Zahl b in N_a enthalten, so ist N_b in N_a enthalten.

Denn nach **6.** ist, wenn b in N_a enthalten ist, N_a zugleich ein Z_b und muß also N_b enthalten.

11. Ist die Zahl b in N_a enthalten, so ist a nicht in N_b enthalten.

Denn nach **9.** ist a nicht in N_a enthalten, und kann also auch nicht in N_b enthalten sein, da nach **10.** jedes Element von N_b zugleich in N_a enthalten ist.

Wir wollen die Menge N_a das System der Zahlen nennen, die größer als a sind. Wir sagen, wenn b eine Zahl in N_a ist, „b ist größer als a“ und drücken dies auch durch das Zeichen aus

$$b > a.$$

Die Sätze **9.**, **10.**, **11.** besagen dann:

9*. a ist nicht größer als a.

10*. Ist b größer als a und c größer als b, so ist auch c größer als a.

11*. Ist b größer als a, so ist a nicht größer als b.

12. Jede natürliche Zahl n, mit Ausnahme der 1, entsteht aus einer bestimmten Zahl a durch Hinzufügen der Einheit, d. h. es gibt eine bestimmte Zahl a, so daß $n = a + 1$ ist. Diese Zahl a bezeichnen wir mit $n - 1$.

Um die ausgesprochenen Behauptungen zu erweisen, bezeichnen wir mit N' die Menge aller Zahlen $a + 1$, wo a jede natürliche Zahl bedeuten kann. In dieser Menge ist die Zahl 2 enthalten, und wenn a in N' enthalten ist, so ist auch $a + 1$ darin enthalten. Es sind folglich die Bedingungen α'), β') für $a = 1$ durch die Menge N' befriedigt, und mithin ist N_1 in N' enthalten. Andrerseits ist aber auch jede Zahl von N' in N_1 enthalten, weil N_1 alle natürlichen Zahlen, mit Ausnahme der 1 enthält und folglich sind beide Mengen identisch.

Es ist daher jede Zahl aus N_1 eine Zahl der Form $a + 1$. Daß es bei gegebenem $a + 1$ nicht mehr als eine Zahl a geben kann, ist dann eine Folge aus § 2, 7. Denn darnach sind, wenn A irgend eine Menge von der Mächtigkeit $a + 1$ und α ein darin enthaltenes Element bedeutet, alle Mengen $A - \alpha$ von gleicher Mächtigkeit.

§ 4. Der Satz von der vollständigen Induktion.

Auf diese genaue Bestimmung der natürlichen Zahlenreihe stützt sich eines der wichtigsten und fruchtbarsten Hilfsmittel, das wir zur Erkenntnis mathematischer Wahrheiten besitzen, das Schlußverfahren der vollständigen Induktion oder der Schluß von n auf $n + 1$. Der Satz, auf dem dies beruht, ist der folgende:

Ist $\mathfrak{S}_n$ irgend eine Aussage über eine unbestimmte Zahl n, d. h. ein Satz, der die unbestimmte Zahl n enthält, und ist diese Aussage als wahr erkannt

a) für einen besonderen Wert der unbestimmten Zahl $n = a$,

b) für die Zahl $n + 1$ unter der Voraussetzung, daß sie für n richtig sei,

so ist $\mathfrak{S}_n$ auch für alle Zahlen der Menge N_a, also für alle Zahlen n, die größer als a sind, wahr.

Wir machen die beiden Voraussetzungen a), b) und bezeichnen

mit S die Menge der Zahlen n, für die der Satz $\mathfrak{S}_n$ wahr ist. In dieser Menge S ist nach a) und b) die Zahl $a+1$ enthalten und S genügt also den Bedingungen α'), β'), § 3. Folglich ist N_a in S enthalten. Also gehört jede Zahl von N_a, (d. h. jede Zahl die größer ist als a), zu den Zahlen n, für die $\mathfrak{S}_n$ wahr ist, wie bewiesen werden sollte.

Das induktive Schlußverfahren, das die Grundlage aller Erfahrungswissenschaften ist, besteht darin, daß man eine Tatsache, die man in Einzelfällen wahrgenommen hat, als ein allgemeines Gesetz betrachtet, das durch fortgesetzte Erfahrung entweder mehr und mehr befestigt oder durch eine entgegenstehende Erfahrung umgestoßen wird. Dieses Verfahren kann in der Mathematik zwar eine Wegleitung geben, in welcher Richtung eine Wahrheit zu suchen ist, zu einem wirklichen Beweise ist aber noch eine Ergänzung notwendig, die in vielen Fällen durch die Anwendung des eben bewiesenen Satzes gewonnen werden kann. Darum führt dieses Schlußverfahren nicht unpassend den Namen der vollständigen Induktion.

Die Zurückführung eines Satzes oder Begriffes, der eine unbestimmte Zahl n enthält, von dem Falle $n+1$ auf den Fall n heißt auch Rekursion.

§ 5. Größenordnung in der Zahlenreihe.

Durch die vollständige Induktion können wir den Satz (§ 3, 11.) auf folgende Weise umkehren:

1. Ist die Zahl a von b verschieden und a nicht in N_b enthalten, so ist b in N_a enthalten.

a') Der Satz ist richtig für $a=1$; denn N_1 entsteht aus der gesamten Zahlenreihe N durch Ausschließung der einzigen Zahl 1 (§ 3, 7.) und mithin ist jede von 1 verschiedene Zahl in N_1 enthalten.

b') Wir nehmen an, der Satz 1. sei für irgend ein a bewiesen. Es sei also b von a verschieden,

a nicht in N_b und folglich b in N_a enthalten.

Es ist zu beweisen:

Ist b von $a+1$ verschieden und $a+1$ nicht in N_b enthalten, so ist b in N_{a+1} enthalten.

Wir können bei diesem Beweise annehmen, daß b auch von a verschieden sei; denn wäre $b=a$, so wäre ja $a+1$ in N_b enthalten.

Wenn dann $a+1$ nicht in N_b enthalten ist, so ist auch a nicht in N_b enthalten; denn nach § 3, β') müßte $a+1$ in N_b enthalten sein, wenn a darin enthalten wäre.

Folglich ist nach der Voraussetzung b in N_a enthalten, und da nach § 3, 7.:

$$N_a = N_{a+1} + (a+1)$$

ist, und $a+1$ von b verschieden, so ist b in N_{a+1} enthalten, wie bewiesen werden sollte.

Also ist der Satz 1. richtig für $a = 1$ und für alle Zahlen a, die in N_1 enthalten sind, d. h. für alle natürlichen Zahlen.

Hiernach ist also von zwei verschiedenen Zahlen a, b entweder a in N_b oder b in N_a enthalten, aber niemals beides zugleich, und darnach lassen sich die natürlichen Zahlen in eine bestimmte Größenordnung bringen.

Wenn wir nämlich die im § 3 gegebene Ausdrucksweise dahin ergänzen, daß wir, wenn b in N_a enthalten ist, b größer als a und a kleiner als b nennen, so folgt, daß wenn a von b verschieden und nicht größer als b ist, a kleiner als b sein muß und es ist von irgend zwei verschiedenen Zahlen a und b immer vollständig bestimmt, welche die größere und welche die kleinere ist. Wir setzen, wenn b die größere ist,

$$b > a \text{ und } a < b,$$

zwei Zeichen, von denen das eine das andere zur Folge hat. Der Satz § 3. 10* läßt sich darnach auch so ergänzen:

2. Ist a kleiner als b, b kleiner als c, so ist auch a kleiner als c.

3. Ist a kleiner als b, so ist auch $a+1$ kleiner als $b+1$.

Denn es ist $N_{a+1} = N_a - (a+1)$ und $N_{b+1} = N_b - (b+1)$. Ist nun $a < b$, so ist N_b ein echter Teil von N_a, und $(a+1)$ kommt in N_b nicht vor. Folglich ist N_b in N_{a+1} enthalten und $N_b - (b+1)$ ist ein Teil von N_{a+1}. Dies ist aber der Inhalt des Satzes 3.

4. Die Mengen N_a sind alle von gleicher Mächtigkeit und von derselben Mächtigkeit wie N.

Denn wenn wir jedes Element a in N mit dem Element $a+1$ in N_1 verbinden, so ist (mit Rücksicht auf § 3, 12.) eine eindeutige Verknüpfung der Elemente von N mit denen von N_1 hergestellt, und folglich ist N_1 von derselben Mächtigkeit wie N.

Ebenso erhalten wir eine eindeutige Verknüpfung der Elemente von N_a mit denen von N_{a+1}, wenn wir jedes Element n der Menge N_a mit $n+1$ der Menge N_{a+1} verbinden, also hat auch N_{a+1} dieselbe Mächtigkeit wie N_a. Aus der vollständigen Induktion ergibt sich dann, daß auch N_a und N dieselbe Mächtigkeit haben. Bezeichnen wir die Mächtigkeit aller dieser Mengen mit ω, so ist ω mit $\omega + 1$ identisch und ω ist also nicht endlich; wir nennen ω eine unendliche (nach G. Cantor transfinite) Zahl.

Eine unendliche Menge, die dieselbe Mächtigkeit wie N hat, heißt abzählbar.

5. Eine Menge M, die eine unendliche Menge A als Teil enthält, ist selbst unendlich.

Denn nehmen wir ein fremdes Element α zu M hinzu, bilden also $M' = M + \alpha$, so können wir nach der Voraussetzung, daß A unendlich sei, $A + \alpha$ auf A eindeutig abbilden. Wenn wir dann jedes Element von $M - A$ mit sich selbst verknüpfen, so ist M' auf M eindeutig abgebildet. Ist also ω die Zahl von M, so ist ω mit $\omega + 1$ identisch, also unendlich.

6. Eine Menge M, die nicht die Mächtigkeit einer natürlichen Zahl hat, enthält einen Teil von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlenreihe, und ist folglich unendlich.

Die Menge M hat, wie jede Menge, einen Teil M_1 von der Mächtigkeit 1, d. h. ein einzelnes Element. Wir nehmen ein solches heraus und verbinden es mit der Zahl 1. Hierauf nehmen wir an, M habe einen Teil M_a von der Zahl a, in dem M_1 enthalten ist. Da M selbst nicht die Mächtigkeit einer Zahl haben soll, so ist M_a ein echter Teil, und es gibt also in M Elemente, die nicht in M_a vorkommen. Wir nehmen ein bestimmtes dieser Elemente, verbinden es mit der Zahl $a + 1$ und fügen es zu M_a hinzu. Dadurch erhalten wir ein M_{a+1}. Aus der vollständigen Induktion ergibt sich, daß diese Konstruktion für jedes a möglich ist, und es ist hierdurch also jeder Zahl a ein bestimmtes Element aus M zugeordnet. Damit ist die Behauptung 6. bewiesen.

Hieraus ergibt sich aber, daß sich der Begriff der natürlichen Zahl mit dem der endlichen Zahl, wie er in § 3, 3. definiert ist, vollständig deckt.

7. In einer endlichen Zahlenmenge S_a, die aus a natürlichen Zahlen besteht, gibt es eine größte und eine kleinste.

Der Satz ist richtig und selbstverständlich für $a = 1$; denn in diesem Falle besteht S_a aus einer einzigen Zahl, die zugleich die größte und die kleinste ist. Nehmen wir an, er sei bewiesen für irgend ein a und sei z_1 die kleinste, z_2 die größte Zahl von S_a. Jedes S_{a+1} entsteht aber aus einem S_a durch Hinzufügung einer einzigen neuen Zahl z_0. Ist dann $z_0 < z_1$, so ist z_0 die kleinste, z_2 die größte unter den Zahlen von S_{a+1}, ist $z_0 > z_2$, so ist z_1 die kleinste, z_0 die größte Zahl von S_{a+1}, und ist endlich $z_1 < z_0 < z_2$, so ist z_1 die kleinste, z_2 die größte Zahl von S_{a+1}. Durch die vollständige Induktion ist darnach also der Satz allgemein bewiesen.

§ 6. Die Kardinalzahlen. Ziffernsysteme.

Wenn wir aus der Zahlenreihe N die Menge N_a ausscheiden, so bleiben außer a nur die Zahlen, die kleiner als a sind, denn jede Zahl, die größer als a ist, ist ja in N_a enthalten.

Wir wollen diese Menge mit E_a bezeichnen, also

$$E_a = N - N_a$$

setzen. Die Menge E_a umfaßt also alle die Zahlen n, die der Bedingung

$$n \overline{\overline{<}} a$$

genügen, oder in Worten, alle Zahlen n, die gleich a oder kleiner als a sind.

1. Aus E_a wird E_{a+1} durch Hinzufügung der einzigen Zahl $(a+1)$.

Denn aus N_a wird N_{a+1} durch Hinauswerfen von $(a+1)$; um also $N - N_{a+1}$ aus $N - N_a$ zu bilden, hat man die Zahl $(a+1)$ hinzuzunehmen.

2. Die Menge E_a hat die Mächtigkeit a.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch die vollständige Induktion. Denn der Satz ist richtig für $a = 1$, weil E_1 aus der einzigen Zahl 1 besteht. Ist er aber für E_a richtig, so folgt er nach 1. für E_{a+1}.

Die Menge E_a ist also endlich und wenn $b > a$ ist, so ist E_a ein echter Teil von E_b, weil N_b ein echter Teil von N_a ist.

Sind also A und B Repräsentanten der natürlichen Zahlen a und b, so ist die Menge A, deren Zahl die kleinere ist, auf einen echten Teil der Menge B mit größerer Zahl eindeutig abbildbar, und ebenso gilt umgekehrt von zwei Repräsentanten natürlicher Zahlen, daß die, die auf einen echten Teil der anderen eindeutig abbildbar ist, die kleinere Zahl hat.

Die Menge E_a ist die Kardinalzahl. Sie eignet sich ganz besonders als Repräsentant der Klasse aller Mengen von der Mächtigkeit a und sie wird auch meist dazu verwandt. Jede endliche Menge A ist auf eine und nur auf eine der Mengen E_a eindeutig abbildbar. Die Ausführung dieser Abbildung wird auch Abzählung genannt, und es ergibt sich also hieraus, daß das Resultat der Abzählung einer endlichen Menge unabhängig ist von der Anordnung der Elemente von A bei der Abzählung. Zu diesem Zweck erhalten die Elemente der Menge N bestimmte Namen und Zeichen, unter denen die fundamentalen sind

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Da aber bei der Zählung reichhaltiger Mengen bald der Wort- und Zeichenschatz erschöpft wäre und die Übersichtlichkeit schnell verloren gehen würde, bedient man sich des Hilfsmittels, daß man gewisse Gruppen von Zahlen zu neuen Einheiten zusammenfaßt, und nicht mehr die Einzeldinge, sondern diese Gruppen zählt. Dies tut schon die Sprache in den Wortbildungen wie zehn, zwanzig, dreißig, hundert, zweihundert u. s. w. Vollkommener aber noch unser decimales Ziffernsystem. Dabei muß, wenn irgend eine Ziffer a geschrieben wird, durch irgend ein Merkmal angedeutet werden, welches die Einheit der gezählten Dinge sei. In einem primitiven Zustand der Rechenkunst geschah dies dadurch, daß die Ziffern, je nach der Einheit, in anderen Rubriken einer Tabelle oder eines Rechenbrettes (Abacus) verzeichnet wurden. Dem gegenüber war es ein unvergleichlicher Fortschritt, daß durch ein besonderes Zeichen, die Null, „0" angedeutet wurde, daß eine der Rubriken nicht ausgefüllt sei, also gar keine Einheit enthielt, wodurch der ganze Apparat der Rubriken überflüssig wurde, da durch den Stellenwert der Ziffern die Art der Einheiten hinlänglich bezeichnet war, die gemeint sind. Dies ist der einfache Grundgedanke, auf dem unser heutiges so vollkommenes Ziffernsystem beruht, dem gegenüber es eine auffallende und sehr unbequeme Disharmonie der deutschen Sprache ist, auf deren Nachteile für den praktischen Rechner kürzlich Förster hingewiesen hat, daß wir im Sprechen die Ziffern in anderer Reihenfolge nennen als wir sie schreiben, z. B. dreihundert fünf und sechzig = 365.

Diese wunderbar einfache Schöpfung des menschlichen Geistes, deren Einfluß auf die gesamte Entwicklung der abendländischen Kultur, wie Kronecker mit Recht sagt, gar nicht hoch genug angeschlagen werden kann, stammt vermutlich aus Indien, und beginnt seit dem zwölften Jahrhundert sich unter Vermittelung der Araber langsam im Abendlande zu verbreiten.

Ein interessanter Versuch, dieses Zusammenfassen von Zahlengruppen zu höheren Einheiten wissenschaftlich durchzubilden, findet sich auch im griechischen Altertum bei Archimedes (287—212 v. Chr.) in einer verloren gegangenen Schrift an Zeuxippus und in einer sehr merkwürdigen uns erhaltenen Schrift, die den Namen ψαμμίτης (Sandrechnung) führt, die auch darum bemerkenswert ist, weil sie Nachrichten über die kosmologischen Anschauungen und Kenntnisse der Alten enthält.

Hier stellt sich der Verfasser die Aufgabe, sehr große Zahlen zu benennen, und er kleidet diese Aufgaben in die eigentümliche Frage nach einer Zahl, die größer ist als die Anzahl der Sandkörner, die eine Kugel von der Größe des Weltalls fassen würde. Mit peinlicher Sorgfalt schätzt er die Maße ab, die hierbei in Betracht kommen,

um sich seiner Meinung nach gegen eine zu niedrige Annahme zu schützen[1]).

Um so ungeheure Zahlen zu benennen, faßt er die Zahlen bis zu hundert Millionen (eine Myriade von Myriaden) als „erste Zahlen" zusammen. Die Zahl hundert Million, die also nach unserer Schreibweise als 1 mit acht Nullen geschrieben wird, bildet die Einheit der „zweiten Zahlen", deren er wieder hundert Millionen zählt, um die Einheit der dritten Zahlen zu bilden, die also mit 1 und 16 Nullen geschrieben wird. Für den Zweck der Sandzählung braucht nicht weiter gegangen zu werden als bis zu den achten Zahlen, deren Einheit mit sechsundfünfzig Nullen geschrieben wird.

Aber Archimedes geht in seinen prinzipiellen Erörterungen bis zu den hundertmillionsten Zahlen, deren letzte, die mit achthundert Millionen Nullen geschrieben wird, die Einheit der zweiten Periode bildet, mit der dann wieder ebenso verfahren werden kann (Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. I).

In theoretischen Untersuchungen brauchen wir häufig Buchstaben für Zahlen, wie wir es in den vorangehenden Betrachtungen bereits mehrfach getan haben, um kürzer und anschaulicher als durch Worte ausdrücken zu können, daß gewisse Aussagen nicht nur für bestimmte, sondern für alle Zahlen gelten. Diese Buchstaben bedeuten aber nicht, wie etwa im Griechischen, bestimmte Zahlen, sondern es soll gestattet sein, für solche Buchstaben jede beliebige Zahl zu setzen. Die Operation mit solchen allgemeinen Zeichen oder Symbolen wird daher auch Buchstabenrechnung genannt.

Ein Satz, der ausspricht, daß ein Zeichen a dieselbe Bedeutung haben soll wie ein anderes Zeichen b, den wir in der mathematischen Zeichensprache auch so ausdrücken $a = b$, heißt eine Gleichung.

---

1) Merkwürdig ist, wie Archimedes verfährt, um zu bestimmten Maßen für die Größe des Weltalls zu gelangen. Die gewöhnliche Meinung nämlich sei, daß die Erde der Mittelpunkt der Welt und der Durchmesser des Kreises, auf dem die Sonne um die Erde gewälzt werde, der Durchmesser der Welt sei. Dagegen habe Aristarch von Samos (um 270 v. Chr.) angenommen, die Sonne sei der Mittelpunkt, um den sich die ganze Welt dreht, und der Durchmesser der Welt, d. h. die Fixsternsphäre, verhalte sich zu dem Durchmesser der Erdbahn wie die Oberfläche der Kugel zum Mittelpunkt. Während Aristarch damit sicher nur sagen wollte, daß die Welt eben unendlich oder unmeßbar sei, so braucht Archimedes für seinen Zweck ein bestimmtes Maß. Er supponiert also, da die Kugel zu einem Punkt, der keine Größe habe, auch kein Verhältnis haben könne, Aristarch habe sagen wollen, die Fixsternsphäre verhalte sich zu der Sphäre der Erdbahn so, wie sich nach der gewöhnlichen Meinung die Welt, d. h. die Sphäre der Sonnenbahn, zu der als Mittelpunkt der Welt betrachteten Erde verhält. Die Sonnenentfernung nimmt er dabei noch viel zu klein an, während er in Bezug auf die Erddimensionen der Wahrheit näher kommt.

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

---

§ 7. Addition.

Wir machen von dem Verfahren der vollständigen Induktion eine Anwendung auf den Beweis des Satzes:

1. Wenn man zwei endliche Mengen A und B zu einer einzigen Menge $A + B$ vereinigt, so entsteht eine endliche Menge.

Wir können uns auf die Annahme beschränken, daß A und B keine gemeinsamen Elemente haben. Denn wenn alle Elemente von B zugleich in A enthalten sind, so ist $A + B = A$, also nach Voraussetzung endlich. Ist aber D der Durchschnitt von A und B, so ist $B - D$ ein Teil von B, der mit A kein Element gemein hat, und es ist

$$A + B = A + (B - D)$$

(§ 2. 5).

Wir nehmen also von vornherein an, daß A und B kein gemeinsames Element haben. Wenn dann B ein einziges Element β enthält, so ist der zu beweisende Satz richtig, denn $A + \beta$ ist nach § 3. 3 endlich.

Nehmen wir aber ferner an, es sei b die Zahl der Elemente von B, und es sei bereits bewiesen, daß $A + B$ endlich ist, so ist, wenn β' ein neues weder in A noch in B enthaltenes Element ist, $B + \beta'$ gleichfalls endlich und seine Zahl ist $b + 1$. Mithin ist auch, wieder nach § 3. 3, $(A + B) + \beta' = A + (B + \beta')$ endlich. Die Voraussetzungen für die Anwendung der vollständigen Induktion sind also vorhanden, und unser Satz ist damit bewiesen.

2. Wenn also A und B endliche Mengen ohne gemeinsames Element sind, und a und b ihre Zahlen, so kommt auch der Menge $A + B$ eine bestimmte Zahl zu, die wir mit $a + b$ bezeichnen und die Summe von a und b nennen. Diese Zahl $a + b$ bleibt die

gleiche, wenn wir die Mengen A und B durch andere Mengen A', B' von gleicher Mächtigkeit ersetzen; denn sind A und A', B und B' aufeinander eindeutig abgebildet, so sind $A+B$ und $A'+B'$ ebenso aufeinander abgebildet. Um also die Zahl $a+b$ zu ermitteln, können wir beliebige Repräsentanten der Zahlen a und b wählen, z. B. die Finger, oder Zählpfennige, und es gibt auch keinen andern Weg zum Ziel als diesen. Man prägt von Kindheit an das Resultat dieser Summenbildung für die kleineren Zahlen dem Gedächtnis ein, um es jederzeit zum Gebrauch bereit zu halten. Unser indisches Ziffernsystem gewährt den Vorteil, daß es ausreicht, wenn wir das Resultat für den Fall besitzen, daß a und b aus der Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genommen sind.

Die Bildung der Summe heißt auch Addition oder Zusammenzählen.

Über die Addition ergeben sich aus dem Früheren leicht die fundamentalen Sätze:

3. Wir haben in § 2. 5 gesehen, daß wenn A, B, C irgend welche Mengen bedeuten,

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

ist. Wenden wir dies auf endliche Mengen an, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, so ergibt sich, wenn a, b, c Zahlen sind, unter denen natürlich auch dieselbe Zahl mehrmals vorkommen kann:

$$a+b=b+a, \tag{1}$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b. \tag{2}$$

Die erste dieser Formeln, die besagt, daß es bei der Addition auf die Reihenfolge nicht ankommt, heißt das kommutative Gesetz. Die zweite besagt, daß man die Summe von drei Zahlen dadurch bilden kann, daß man nach Belieben erst zwei Zahlen zu einer Summe vereinigt und dann die gewonnene Summe mit der einen übrig bleibenden. Dies ist auf drei Arten möglich, die alle zu demselben Resultat führen. Das hierdurch ausgesprochene Gesetz heißt das associative Gesetz.

Diese Gesetze lassen sich noch sehr verallgemeinern.

Sind A, B, C, ... N beliebige Mengen in endlicher Zahl, so gibt es eine bestimmte Menge S, die alle Elemente von diesen Mengen und keine anderen enthält. Diese Menge ist zu bezeichnen mit

$$S=A+B+C+\cdots+N,$$

und, wie sich durch die vollständige Induktion aus 1. ergibt, ist S

endlich, wenn $A, B, C, \ldots N$ es sind. Enthalten die Mengen $A, B, C, \ldots N$ keine Elemente, die mehreren von ihnen zugleich angehören, so heißt die Zahl von S die Summe der Zahlen von $A, B, C, \ldots N$. Bezeichnen wir die letzteren Zahlen mit $a, b, c, \ldots n$ und mit s die Zahl von S, so schreiben wir

$$s = a + b + c + \cdots + n,$$

und nennen $a, b, c, \ldots n$ auch die Summanden von s.

Die Bestimmung der Zahl s geschieht dann durch Abzählung der Menge S.

Bei der Berechnung verfährt man kürzer so, daß man die Summanden in einer beliebigen Reihenfolge untereinander schreibt, und dann, von unten oder von oben anfangend jede folgende Zahl zu der bereits gebildeten Summe addiert. Daß das Ergebnis dieser Rechnung von der Reihenfolge unabhängig ist, in der die Addition vorgenommen wird, ist dann eine Folge aus der Unabhängigkeit der Zahl von der Reihenfolge des Zählens, die wir in § 6 bewiesen haben.

Bei dekadisch geschriebenen Zahlen addiert man zunächst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter u. s. f., wobei dann die sich bei der Addition der niedrigeren Einheiten ergebenden höheren bei der Addition der nächst höheren Einheiten zu berücksichtigen sind. Dies lernen schon die Kinder.

4. Die Addition enthält als besonderen Fall die Vorschrift, nach der wir in § 3 aus einer Zahl m die nächst größere $m + 1$ definiert haben. Es ergibt sich ferner leicht aus den dort gegebenen Bestimmungen über größer und kleiner, daß die Summe eines Teiles der Zahlen $a, b, c, \ldots n$ kleiner ist als die Summe aller; ferner daß die Summe größer wird, wenn einer oder einige der Summanden vergrößert werden. Dies alles folgt daraus, daß von zwei endlichen Mengen die kleinere Zahl derjenigen zukommt, die auf einen Teil der anderen eindeutig abbildbar ist.

§ 8. Multiplikation.

1. Es kommt so häufig vor, daß man Summen aus mehreren Zahlen zu bilden hat, die alle einander gleich sind, daß man dafür eine eigene Bezeichnung braucht. Um diese zu erklären, nehmen wir an, es seien a Summanden vorhanden, die alle gleich b sind, und es sei die Summe aller dieser Zahlen zu bilden, also z. B.

$$b + b + b \quad \text{für} \quad a = 3,$$

$$b + b + b + b \quad \text{für} \quad a = 4.$$

Die Summe dieser a Zahlen b bezeichnet man mit $a \cdot b$ oder mit

$a \times b$ oder auch nur mit ab, und nennt diese Bildung die Multiplikation oder das Multiplizieren (Vervielfältigen) der Zahl b mit der Zahl a.

Die Zahl b heißt der Multiplikand, die Zahl a der Multiplikator, und das Resultat der Multiplikation ab heißt das Produkt von a und b.

Nach der Definition ist $a \cdot 1 = a$, und wir wollen auch, was in dem Vorigen noch nicht enthalten war, $1 \cdot b = b$ setzen. Man kann das Produkt für höhere Multiplikatoren aus dem für niedrigere, also durch Rekursion, nach der Formel

$$ab + b = (a + 1) b \tag{1}$$

bilden, die nach der soeben getroffenen Festsetzung auch für $a = 1$ gilt.

2. Der erste Hauptsatz über die Multiplikation ist das kommutative Gesetz, welches darin besteht, daß das Resultat der Multiplikation das gleiche bleibt, wenn man den Multiplikator mit dem Multiplikanden vertauscht, das sich auch durch die Formel

$$ab = ba \tag{2}$$

ausdrücken läßt.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich durch die vollständige Induktion führen. Wir denken uns a endliche Mengen B, die wir, um sie voneinander zu unterscheiden, mit $B_1, B_2, \ldots B_a$ bezeichnen wollen. Keine zwei dieser Mengen sollen ein gemeinsames Element haben, dagegen sollen sie alle von gleicher Mächtigkeit b sein. Das Produkt ab ist dann die Zahl der Menge M, die man erhält, wenn man alle diese $B_1, B_2, \ldots B_a$ zu einer einzigen Menge vereinigt.

Wir fügen nun zu jeder der Mengen $B_1, B_2, \ldots B_a$ noch ein neues Element hinzu, so daß b in $b + 1$ übergeht, also zu der Menge M noch a neue Elemente. Geht dadurch M in M' über, so ist die Zahl von M' $ab + a$. Auf der anderen Seite ist diese Menge aber auch gleich $a(b + 1)$, woraus sich

$$ab + a = a(b + 1) \tag{3}$$

ergibt, und diese Formel gilt auch für $b = 1$. Für $b = 1$ ist aber nach der Definition $ab = ba$. Nehmen wir also an, es sei für irgend ein b die Formel (2) bewiesen, so folgt aus (3)

$$a(b + 1) = ba + a,$$

und, wenn man in (1) a durch b ersetzt, so folgt

$$ba + a = (b + 1) a,$$

also

$$a(b + 1) = (b + 1) a,$$

d. h. die Richtigkeit der Formel (1) für das nächst größere b. Da-

mit sind aber die Grundlagen für die vollständige Induktion gewonnen, und ist also das kommutative Gesetz allgemein bewiesen.

Hiernach ist es nicht mehr notwendig beim Produkt zwischen Multiplikator und Multiplikand zu unterscheiden. Man nennt sie daher beide unterschiedslos die Faktoren des Produktes.

Zur Ausführung der Multiplikation genügt es, wenn man die Produkte je zweier Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, „das kleine Einmaleins", zur Verfügung hat, die man durch direkte Abzählung an beliebigen Objekten bildet und dem Gedächtnis einprägt. Das dekadische Zahlensystem gestattet dann in bekannter Weise sehr einfach die Berechnung der Produkte auch großer Zahlen.

3. Das associative Gesetz.

Ich denke mir jedes Element der sämtlichen Mengen $B_1, B_2, \ldots B_a$ durch eine Menge C ersetzt. Alle diese Mengen C sollen von der gleichen Mächtigkeit c sein, aber keine zwei sollen ein gemeinschaftliches Element enthalten. Ich vereinige nun alle Elemente dieser Mengen C zu einer einzigen Menge P, deren Zahl zu bestimmen ist.

Die Anzahl der Mengen C ist aber ab, und folglich ist die Anzahl der Elemente von P gleich

$$(ab)\,c.$$

Andererseits ist die Anzahl der in jedem B enthaltenen Elemente gleich bc, und da die Anzahl der Mengen B gleich a ist, so ist die Anzahl der Elemente in P auch gleich

$$a(bc).$$

Daraus ergibt sich die Formel:

$$(ab)\,c = a(bc), \tag{4}$$

in der das associative Gesetz enthalten ist.

Verbindet man dieses Gesetz mit dem vorigen, so kann man zwölf verschiedene Ausdrücke für dieselbe Zahl erhalten.

Die Rechenregel läßt sich dann in folgende Vorschrift zusammenfassen. Man vereinige irgend zwei der drei Zahlen a, b, c zu einem Produkt und vereinige dann dieses Produkt mit der übrig gebliebenen dritten Zahl zu einem neuen Produkt. Das Resultat ist unabhängig von der Auswahl der beiden ersten Zahlen und wird, da die Klammern nun nicht mehr erforderlich sind, mit

$$m = abc$$

bezeichnet. m heißt das Produkt der drei Zahlen a, b, c, und diese die Faktoren des Produktes.

Man kann sich diesen Beweis des kommutativen und associativen Gesetzes dadurch anschaulicher machen, daß man sich die Elemente

der Menge C etwa als Kugeln denkt, die in Reihen von je c angeordnet sind; b dieser Reihen werden zu einem Rechteck angeordnet und a dieser Rechtecke werden dann noch übereinander geschichtet.

Die ganze Anordnung hat dann die Gestalt eines rechtwinkligen Prismas, bei dem auf drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b und c Kugeln angeordnet sind. Man kann dann diese Kugeln auf drei verschiedene Arten zu Rechtecken schichten, und in jedem Rechteck auf zwei verschiedene Arten zu Reihen anordnen.

4. Auf Grund dieser Sätze können wir nun mittels der vollständigen Induktion das Produkt aus beliebig vielen Faktoren definieren.

Es sei eine beliebige Menge R von Zahlen

$$a, b, c, d, \ldots n \quad (R)$$

gegeben. Ihre Anzahl möge r sein. Man greife zwei beliebige von ihnen heraus und vereinige sie zu einem Produkt. Dadurch entsteht eine Menge von $r-1$ Zahlen, in der man wieder zwei beliebige Zahlen zu einem Produkt vereinigt, und fährt damit fort, bis man nur noch eine Zahl hat. Diese eine Zahl ist unabhängig von der Art, wie man jedesmal die zwei Zahlen herausgegriffen hat, also unabhängig von der Anordnung der Rechnung. Wir nennen sie das Produkt der Faktoren $a, b, c, \ldots n$ und setzen, wenn wir es mit m bezeichnen,

$$m = abcd \ldots n,$$

d. h. wir setzen die sämtlichen Faktoren einfach neben einander.

Beim Beweis dieser Behauptung nehmen wir wieder die vollständige Induktion zu Hilfe. Der Satz ist wie wir in 2. und 3. gesehen haben, richtig, wenn $r = 2$ oder $r = 3$ ist. ($r = 2$ allein würde hier nicht genügen, da bei zwei Faktoren das associative Gesetz noch nicht zur Geltung kommt.) Wir nehmen also seine Richtigkeit an für Produkte aus $r-1$ Faktoren und beweisen ihn unter dieser Voraussetzung für r Faktoren. Wir vereinigen also in dem System R zunächst irgend zwei Faktoren zu einem Produkt, und es ist offenbar nur Sache der Bezeichnung, wenn wir diese a und b nennen. Wir kommen also zu einer Menge R' von $r-1$ Zahlen

$$(ab), c, d, \ldots n \quad (R').$$

Fangen wir auf eine andere Weise an, so können wir entweder die beiden ersten Faktoren von a und b verschieden annehmen, also etwa eine Menge R'', gleichfalls von $r-1$ Zahlen bilden

$$a, b, (cd), \ldots n \quad (R''),$$

oder wir können a oder b für einen der ersten Faktoren nehmen, also etwa

$$(ac),\ b,\ d,\ \ldots\ n \qquad (R''')$$

bilden.

Nach der Voraussetzung sind nun die Produkte der Zahlen R', R'', R''' von der Anordnung der Rechnung unabhängig, und es läßt sich diese weitere Rechnung so führen, daß nach dem nächsten Schritt R' und R'' sowohl als R' und R''' identische Systeme ergeben, nämlich R' und R'':

$$(ab),\ (cd),\ \ldots\ n,$$

R' und R''':

$$(abc),\ d,\ \ldots\ n,$$

und es ergeben also R', R'' und R''' dieselben Produkte, wie bewiesen werden sollte.

5. Aus den entsprechenden Sätzen für die Addition (§ 7. 4.) ergibt sich sofort, daß ein Produkt größer wird, wenn einer der Faktoren größer wird, oder in Zeichen: Ist

$$a > a',$$

so ist auch

$$ab > a'b,$$

und um so mehr folgt aus $a > a'$, $b > b'$:

$$ab > a'b'.$$

Durch vollständige Induktion leitet man daraus den Satz ab, daß ein Produkt von beliebig vielen Faktoren vergrößert wird, wenn irgend welche dieser Faktoren vergrößert werden und die übrigen ungeändert bleiben. Als Korollar ergibt sich noch, daß ein Produkt ac nur dann $= bc$ sein kann, wenn $a = b$ ist.

§ 9. Produkte von Summen.

1. Wenn von den beiden Faktoren eines Produktes der eine als Summe von mehreren Summanden gegeben ist, so läßt sich das Produkt als Summe einer gleichen Anzahl von Summanden darstellen, ohne daß man erst die Summanden zu einer einzigen Zahl zu vereinigen braucht.

Nehmen wir nämlich an, es sei eine Summe von r Summanden

$$s = a + b + c + \cdots + n$$

mit einer Zahl m zu multiplizieren, so ist dieses Produkt nach der Definition der Multiplikation gleich einer Summe, in der m Summanden gleich a, ebenso m Summanden gleich b u. s. f., endlich m Sum-

manden gleich n sind. Da wir die Summanden in beliebiger Reihenfolge addieren können, so können wir zunächst alle a vereinigen, d. h. das Produkt ma bilden, sodann alle b, also das Produkt mb, zuletzt das Produkt mn bilden. Man erhält hiernach

$$ms = ma + mb + mc + \cdots + mn.$$

Um anzudeuten, daß man die ganze Summe $a + b + \cdots + n$ mit der Zahl m zu multiplizieren hat, muß man sich einer Klammer bedienen und also

$$(1)\qquad m(a + b + c + \cdots + n) = ma + mb + mc + \cdots + mn$$

schreiben. Nach dem kommutativen Gesetz der Multiplikation hat man aber auch

$$(2)\qquad (a + b + c + \cdots + n)m = am + bm + cm + \cdots + nm.$$

Es kommt oft vor, daß eine Summe in der Form

$$ma + mb + mc + \cdots + mn$$

gegeben ist, daß es aber vorteilhafter ist, sie in der Form

$$m(a + b + c + \cdots + n) \quad \text{oder} \quad (a + b + c + \cdots + n)m$$

weiter zu benutzen. Diese Operation nennt man das Ausklammern des Faktors m.

2. Wenn der zweite Faktor m selbst wieder als Summe gegeben ist:

$$m = a' + b' + c' + \cdots + n',$$

so kann man auf die rechte Seite von (1) oder (2) dieselbe Regel nochmals anwenden, und erhält so den Satz:

Um das Produkt der beiden Summen

$$(a + b + c + \cdots + n)(a' + b' + c' + \cdots + n')$$

zu bilden, multipliziert man **jeden Summanden** der einen Summe mit **jedem Summanden** der anderen und nimmt die Summe aller so gebildeten Produkte.

Enthält die erste Summe r, die zweite r' Summanden, so enthält das Produkt rr' Summanden. Denn jeder der r Summanden $am, bm, cm, \ldots nm$ auf der rechten Seite von (2) ist in r' Summanden zerlegt.

Statt eine Reihe von Zahlen durch die aufeinander folgenden Buchstaben $a, b, c, \ldots$ zu bezeichnen, benutzt man bisweilen auch einen und denselben Buchstaben, etwa a, muß aber dann, wenn man unterscheiden will, noch eine Marke, einen „Index", beifügen, wie $a_1, a_2, \ldots a_r$. Der Index selbst wird häufig wieder durch einen Buchstaben bezeichnet, der dann die Zahlen $1, 2, \ldots r$ bedeuten kann, etwa

$$a_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots r.$$

Die Summe s der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ kann dann so dargestellt werden:

$$s = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha,$$

wo das Zeichen Σ (griechisch sigma) als Abkürzung für das Wort Summe anzusehen ist; 1 und r heißen die Grenzen für α. Wenn die Angabe dieser Grenzen nicht nötig erscheint, so schreibt man auch wohl

$$s = \sum^{\alpha} a_\alpha.$$

Der Inhalt des Satzes 2. kann nach dieser Bezeichnung in der Formel zusammengefaßt werden:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right) = \sum^{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \tag{3}$$

und dieser Satz läßt sich dann auch auf Produkte aus mehreren Faktoren ausdehnen, z. B.

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{r''} c_\gamma\right) = \sum^{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma. \tag{4}$$

Ein Ausdruck von der Form $a + b$, worin a und b unbestimmte Zahlen bedeuten, wird auch ein Binom genannt. Ebenso heißt $a + b + c$ ein Trinom und allgemein eine Summe aus mehreren solchen Summanden, die durch Buchstaben bezeichnet sind, ein Polynom. Die einzelnen Summanden heißen die Glieder des Polynoms.

§ 10. Potenzierung.

1. Ebenso wie man aus der Addition gleicher Summanden auf die Multiplikation geführt wurde, so führt die Betrachtung der Multiplikation gleicher Faktoren auf eine neue Rechenoperation, das Potenzieren.

Es soll ein Produkt aus n Faktoren gebildet werden, die alle einander gleich, etwa gleich a sind. Das Resultat dieser Rechnung heißt die n^{te} Potenz von a. Man schreibt auch

$$aa \cdots a = a^n, \tag{1}$$

wo man sich auf der linken Seite die n Faktoren a zu denken hat; a heißt die Basis und n der Exponent der Potenz; man sagt

dafür auch „a zur n^{ten} Potenz" oder kürzer „a zur n^{ten}" oder „a hoch n". Die n^{te} Potenz einer Zahl a nehmen, heißt auch „die Zahl a in die n^{te} Potenz erheben".

Die erste Potenz von a ist gleich a selbst:

$$a^1 = a. \tag{2}$$

Da die Multiplikation einer jeden Zahl mit dem Multiplikator 1 den Multiplikanden selbst wieder ergibt, so folgt für jeden Exponenten n

$$1^n = 1. \tag{3}$$

Wegen der Anwendung in der Geometrie wird insbesondere die zweite Potenz von a, also a^2, auch das „Quadrat von a" oder „a-Quadrat" genannt. Die dritte Potenz a^3 heißt der „Kubus von a".

Der Hauptsatz über die Potenzen, dessen Beweis sich unmittelbar aus der Definition ergibt, lautet:

2. Um zwei Potenzen mit derselben Basis miteinander zu multiplizieren, addiert man die Exponenten; oder in Zeichen:

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{4}$$

Denn rechts und links steht ein Produkt aus $m + n$ Faktoren a. Der Satz läßt sich ohne weiteres durch vollständige Induktion auf ein Produkt von beliebig vielen Faktoren übertragen, und er lautet dann

$$a^m a^n \cdots a^q = a^{m+n+\cdots+q}, \tag{5}$$

worin $m, n, \ldots, q$ beliebige Zahlen sind in gleichfalls beliebiger Anzahl r.

3. Wenn man in (5) die Exponenten $m, n, \ldots q$ alle einander gleich annimmt, so ergibt sich der zweite Satz über die Potenzen.

Um eine Potenz zu potenzieren, multipliziert man die Exponenten, oder in Zeichen:

$$(a^m)^r = a^{mr}. \tag{6}$$

4. Ein Produkt von mehreren Faktoren kann dadurch mit n potenziert werden, daß man jeden einzelnen Faktor in die Potenz n erhebt und das Produkt dieser Potenzen nimmt, also:

$$(abc\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots$$

Wenn man hierin die Basiszahlen alle einander gleich nimmt, so erhält man nach (5) wieder den Satz 3.

5. Wenn a größer als 1 ist, so ist a^n um so größer, je größer n ist, und man kann n immer so groß annehmen, daß a^n größer ist als eine beliebig gegebene Zahl c. Hiervon kann man sich leicht durch die vollständige Induktion überzeugen. Denn die Behauptung ist jedenfalls richtig für $c = 1$, da ja schon $a^1 > 1$ ist.

Ist aber $a^n > c$, so ist $a^{n+1} > ac > c + 1$. Wenn die Behauptung also für c richtig ist, so ist sie auch richtig für $c + 1$ und damit allgemein:

Ist $a^n > c$ für irgend einen Wert m von n, so ist um so mehr $a^n > c$, wenn n größer als m ist.

6. Unser dekadisches Zahlensystem beruht auf den Potenzen der Zahl 10. Die n^{te} Potenz von 10 wird mit einer 1 und n Nullen geschrieben, und diese Potenzen bilden die Einheiten der verschiedenen Ordnungen. Eine r-stellige Zahl $abc \ldots mn$ hat die Bedeutung

$$a\,10^r + b\,10^{r-1} + c\,10^{r-2} + \cdots + m\,10 + n. \tag{7}$$

Um aber die Potenzen bloß durch den Stellenwert der Ziffern unzweideutig auszudrücken, muß man auch andeuten können, welche Potenzen etwa in der Reihe fehlen, und dafür ist das Zeichen 0 (Null), das in die Reihe der Ziffern aufgenommen werden muß. (Das Wort Tziphra bedeutet ursprünglich bloß die Null, und wurde erst später auf die übrigen Zahlzeichen übertragen.) Demnach hat man in (7) unter $a, b, c \ldots m, n$ Zeichen aus der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

zu verstehen. Wenn eine Ziffer beim Rechnen darüber hinausgeht, so hat man die Formel anzuwenden

$$(a + 10)\,10^r = 10^{r+1} + a\,10^r.$$

Die Vorschriften für die Multiplikation dekadischer Zahlen beruhen, wie man sieht, auf dem Satze § 9, 2.

Bei den Potenzen gilt weder das kommutative, noch das associative Gesetz, denn a^b ist etwas anderes als b^a (z. B. $a^1 = a$, $1^a = 1$), und ebenso ist $a^{(m^r)}$ etwas anderes als $(a^m)^r$ $\left(\text{z. B. } a^{(1^r)} = a,\ (a^1)^r = a^r\right)$. Aus diesem Grunde setzt man die Bildung neuer Rechenoperationen auf dem Wege, wie man aus der Addition die Multiplikation abgeleitet hat, nicht weiter fort, obwohl sie an sich möglich wäre, indem man für Basis und Exponenten dieselbe Zahl setzt. Die Gesetze dieser Operation wären nicht einfach, und das praktische Bedürfnis im Leben und in der Wissenschaft hat eine solche Verallgemeinerung auch noch nie notwendig gemacht.

§ 11. Subtraktion. Negative Zahlen.

1. Wenn wir aus einer endlichen Menge A einen Teil B ausscheiden, so bleibt eine endliche Menge $A - B$, deren Zahl c durch die Zahlen a und b von A und B vollständig bestimmt ist. Wir setzen

$$c = a - b \tag{1}$$

und nennen $a - b$ (a weniger b oder a minus b) die Differenz oder den Unterschied von a und b und die Operation, durch die diese Differenz gefunden wird, das Abziehen oder die Subtraktion. a heißt der Minuend, b der Subtrahend.

Da B ein Teil von A ist, so folgt, daß der Minuend stets größer sein muß als der Subtrahend.

Um im dekadischen System rechnen zu können, genügt es, wenn man sich (durch direktes Abzählen) für die kleineren Zahlen die Resultate einprägt. Dabei muß man mit dem Minuenden bis 18, mit dem Subtrahenden bis 9 gehen. Schon dieses dekadische Rechnen stellt uns bisweilen die Aufgabe, eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahieren, wobei man sich dadurch hilft, daß man den Minuenden durch Hinzunahme einer Einheit der nächst höheren Ordnung vergrößert („Borgen"). Die wissenschaftliche Arithmetik fordert aber ebenso wie viele Anwendungen in noch weiterem Umfang eine Verallgemeinerung der Aufgabe der Subtraktion, der wir nur durch Erschaffung einer neuen Zahlengattung gerecht werden können.

Wir stellen die Aufgabe so:

2. Sind a und b irgend zwei gegebene Zahlen, so soll eine Zahl c bestimmt werden, die man zu b hinzufügen muß, um a zu erhalten.

Wenn $a > b$ ist, so löst uns die Formel (1) diese Aufgabe. Ist $a = b$, so brauchen wir zu b nichts hinzuzufügen, um a zu erhalten, und dies drücken wir, wie schon im dekadischen Ziffernsystem, dadurch aus, daß wir durch Null oder 0 das leere System bezeichnen, also

$$a - a = 0, \quad a + 0 = a, \quad a - 0 = a \tag{2}$$

setzen. In einem weiteren Sinn nennen wir jetzt auch die Null eine Zahl. Ist aber b größer als a, so enthält die Aufgabe 2. eine bis jetzt noch unerfüllbare Forderung. Wollen wir sie doch erfüllbar machen, so müssen wir dem Worte „Zahl" eine erweiterte Bedeutung geben.

3. Wir denken uns die Reihe der natürlichen Zahlen (ohne die Null) ein zweites Mal, und wenden diese zweite Reihe zur Zählung von Dingen an, die mit den Dingen, die wir durch die erste

Zahlenreihe gezählt haben, in einer gewissen gegensätzlichen Beziehung stehen, wie etwa Dinge die rechts liegen und Dinge die links liegen, Thermometergrade über dem Gefrierpunkt und unter dem Gefrierpunkt, Vermögen und Schulden. Zum Unterschied müssen wir diese zweite Zahlenreihe durch eine Marke von der ersten unterscheiden. Wir nennen, wenn ein solcher Gegensatz gemacht werden soll, die ersten Zahlen die positiven Zahlen, die zweiten die negativen Zahlen und bezeichnen diese, wenn a eine natürliche Zahl ist, mit $-a$, also

$$-1, \ -2, \ -3, \ \text{u. s. f.},$$

gesprochen: minus eins, minus zwei, minus drei u. s. f.

Bisweilen, wenn der Gegensatz deutlich hervorgehoben werden soll, bezeichnet man auch die positiven Zahlen mit $+a$, also

$$+1, \ +2, \ +3, \ \text{u. s. f.},$$

gesprochen: plus eins, plus zwei, plus drei u. s. f., und die natürliche Zahl a wird auch der absolute Wert von $+a$ und $-a$ genannt. Um eine Zahl der einen oder der anderen Zahlenreihe auszudrücken, bedient man sich auch des Zeichens $\pm a$ (gesprochen plus oder minus a). Das Zeichen $+$ oder $-$ bei $\pm a$ heißt das Vorzeichen.

Die Zahl Null können wir nach Belieben der einen oder der anderen Zahlenreihe zuteilen; $+0$ und -0 sind identisch. Je zwei Zahlen dieser Reihen, die denselben absoluten Wert aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen entgegengesetzt. Die Null ist sich selbst entgegengesetzt. Die entgegengesetzte zu der entgegengesetzten ist wieder die ursprüngliche Zahl. Wenn also α eine negative Zahl ist, so versteht man unter $-\alpha$ die positive Zahl mit demselben absoluten Werte. Diese doppelte Zahlenreihe, einschließlich der Null, nennen wir die Reihe der ganzen Zahlen. In ihr stellen wir durch folgende Vorschrift eine Größenordnung her.

4. Die positiven Zahlen sind alle größer als Null, die negativen kleiner als Null, also, wenn a positiv ist,

$$a > 0, \quad -a < 0.$$

Die positiven Zahlen werden geordnet wie früher, die negativen aber in umgekehrter Ordnung, so daß von zwei negativen Zahlen die als die kleinere gilt, die den größeren absoluten Wert hat.

Durch diese Festsetzung ist erreicht, daß, wenn α, β, γ Zahlen der ganzen Reihe sind, und α kleiner als β, β kleiner als γ, auch α kleiner als γ ist.

Diese Größenordnung nennt man wohl auch die algebraische, nennt also, wenn die Größe mit Rücksicht auf das Vorzeichen ge-

schätzt wird, die eine „algebraisch größer oder kleiner“ als die andere, im Gegensatz zu „absolut größer und kleiner“. Wenn α algebraisch kleiner als β ist, so setzt man $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Wenn die Gleichheit nicht ausgeschlossen sein soll, so setzt man auch

$$\alpha \overset{=}{<} \beta,$$

gesprochen: α gleich β oder kleiner als β (bisweilen auch kürzer, wenn auch sprachlich nicht korrekt, α gleich oder kleiner als β). Ebenso $\beta \overset{=}{>} \alpha$.

Um mit diesen Bestimmungen eine Anschauung zu verbinden, denke man sich auf einer Linie Punkte markiert (wie Perlen, die auf einer Schnur aufgereiht sind). Einen beliebigen dieser Punkte bezeichne man mit 0 und zähle nach der einen Seite, etwa der rechten, die Punkte $+1$, $+2$, $+3$ u. s. f., nach der anderen Seite die Punkte -1, -2, -3 u. s. f. (Fig. 1).

−4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4

Fig. 1.

Dann kommt einem Punkte, der rechts von einem anderen liegt, eine größere Zahl zu als diesem. Die Zahlen wachsen in der Richtung nach rechts, oder wie wir auch sagen können, in der positiven Richtung.

§ 12. Rechnen im Bereich der ganzen Zahlen.

In dieser Zahlenreihe geben wir nun aus eigener Machtvollkommenheit unseres Geistes folgende Rechenvorschriften, wobei wir uns von dem Grundsatz leiten lassen, daß die schon bekannten Rechenregeln im Gebiete der natürlichen Zahlen als Spezialfälle in den neuen Regeln enthalten sind, und daß die Gesetze, die wir dort erkannt haben, nach Möglichkeit in dem umfassenderen Gebiete aufrecht erhalten werden.

1. Addition. Es seien α, β zwei ganze Zahlen mit den absoluten Werten a, b und es sei

(1) $$b \overset{=}{>} a.$$

Dann setzen wir

		Vorzeichen von α, β
(2)	$\alpha + \beta = a + b$	$+\ +$
	$= b - a$	$-\ +$
	$= -(b - a)$	$+\ -$
	$= -(a + b)$	$-\ -$

(3) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Hierbei kann die 0 sowohl den positiven als den negativen Zahlen zugezählt werden.

Mit Hilfe der Punktreihe (§ 11, Fig. 1) läßt sich die Addition veranschaulichen:

Um zu einer Zahl α eine Zahl β mit dem absoluten Werte b zu addieren, zählt man, je nachdem β positiv oder negativ ist, von dem auf α folgenden Punkt $\alpha + 1$ anfangend vorwärts oder von dem vorangehenden Punkt $\alpha - 1$ rückwärts b Punkte weiter. Der Endpunkt, auf den man dabei kommt, hat dann zum Zeichen die Zahl $\alpha + \beta$.

2. Subtraktion. Unter derselben Voraussetzung (1) setzen wir

		Vorzeichen von α	β
(4)	$\alpha - \beta = -(b - a)$	$+$	$+$
	$= -(a + b)$	$-$	$+$
	$= a + b$	$+$	$-$
	$= b - a$	$-$	$-$

$$\beta - \alpha = -(\alpha - \beta). \tag{5}$$

Man sieht, daß die Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen hierin enthalten sind.

Es lassen sich also hiernach beliebige Zahlen, welche Größenbeziehung sie auch haben mögen, voneinander subtrahieren. Immer ist das Resultat eine ganz bestimmte Zahl der Reihe.

3. Die Subtraktion kann auf die Addition zurückgeführt werden, nach der Formel

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta). \tag{6}$$

Danach ist die Subtraktion irgend einer Zahl gleichbedeutend mit der Addition der entgegengesetzten Zahl.

Hiernach kann man auch die Subtraktion durch Abzählen auf der Punktreihe ausführen, wie die Addition.

4. Das associative Gesetz der Addition. Das kommutative Gesetz der Addition haben wir in der Formel (3) bereits angenommen. Das associative Gesetz würde sich in der Formel

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \beta + (\alpha + \gamma) \tag{7}$$

aussprechen, worin α, β, γ irgend drei Zahlen sind, deren absolute Werte wir mit a, b, c bezeichnen wollen.

Dieses Gesetz folgt aus den Definitionen (2), (3). Die Zahl der Fälle, die man nach den Vorzeichen und der Größe der Zahl α, β, γ zu unterscheiden hat, vermindert sich durch die Bemerkung, daß die Formel (7), wenn sie für irgend ein Zahlensystem α, β, γ als richtig

angenommen wird, auch richtig bleibt, wenn α mit β oder β mit γ oder α mit γ vertauscht wird, oder wenn α, β, γ durch $-\alpha, -\beta, -\gamma$ ersetzt wird. Demnach genügt es, wenn wir die Formel (7) als richtig erwiesen haben unter der Voraussetzung

$$a \leqq b \leqq c \qquad \gamma \text{ positiv } (\gamma = c).$$

Es bleiben also nur noch vier Fälle zu berücksichtigen nach den Vorzeichen von α und β: Die Formel (7) ergibt für diese vier Fälle:

1. α und β sind positiv,

$$(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c);$$

2. α ist negativ, β positiv. Dann gibt (7)

$$(b - a) + c = (b + c) - a = b + (c - a);$$

3. α ist positiv, β negativ,

$$c - (b - a) = a + (c - b) = (a + c) - b;$$

4. α und β sind negativ,

$$c - (a + b) = (c - b) - a = (c - a) - b, \; c > a + b,$$

$$(a + b) - c = a - (c - b) = b - (c - a), \; c < a + b,$$

und die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich aus § 2, (6) und (7). Hierdurch ist das associative Gesetz für die verallgemeinerte Addition erwiesen.

Wenn man nun genau dasselbe Verfahren beobachtet, das wir im § 8 auf die Multiplikation angewandt haben, so ergibt sich das allgemeinere Gesetz:

5. Wenn man die Summe einer beliebigen Menge ganzer Zahlen (Summanden) zu bestimmen hat, so vereinige man zunächst zwei beliebige dieser Summanden zu einer Summe; von dem so gebildeten neuen System von weniger Elementen wieder zwei und fahre so fort, bis eine einzige Zahl übrig geblieben ist. Diese Zahl ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Rechenoperationen vorgenommen waren, und heißt die Summe der sämtlichen Zahlen.

6. Das kommutative und associative Gesetz nimmt für die Subtraktion eine andere Form an, die sich aber aus der für die Addition leicht ergibt, wenn man die Subtraktion als Addition negativer Zahlen ansieht (Nr. 1). Die betreffenden Formeln lauten, wenn α, β, γ irgend welche Zahlen sind,

$$\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \quad (\text{wie } (5)), \tag{8}$$

$$(\alpha + \beta) - \gamma = \alpha + (\beta - \gamma), \tag{9}$$

(10) $$(\alpha-\beta)+\gamma=\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+(\gamma-\beta),$$

(11) $$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta.$$

7. Daraus ergibt sich (durch vollständige Induktion) die oft gebrauchte Regel der Subtraktion eines Polynoms, die man mit dem Namen der Klammerauflösung bezeichnet, und die in der folgenden Formel ihren Ausdruck findet:

$$\alpha-(\beta+\gamma+\cdots+\nu)=\alpha-\beta-\gamma-\cdots-\nu$$

oder in Worten:

Wenn ein Polynom, das durch Addition oder Subtraktion einer beliebigen Menge von Zahlen gebildet und in eine Klammer gesetzt ist, als Ganzes von einer Zahl zu subtrahieren ist, so kann man die Klammer weglassen, wenn man jedem Gliede des Polynoms das entgegengesetzte Zeichen gibt, oder jede Addition in eine Subtraktion und umgekehrt, verwandelt.

§ 13. Multiplikation.

1. Wenn wir die Multiplikation wie in § 8 als eine wiederholte Addition derselben Zahl erklären, so können wir den Begriff auch auf den Fall ausdehnen, daß der Multiplikand negativ oder Null ist. Es ist dann, wie sich aus der Klammerregel des vorigen Paragraphen sofort ergibt, wenn a und b natürliche Zahlen sind:

(1) $$a(-b)=-(ab),$$

(2) $$a\cdot 0 = 0.$$

Für einen negativen Multiplikator aber gibt diese Definition der Multiplikation keinen Sinn, und es steht noch bei uns, welche Bedeutung wir diesen Zeichen geben wollen. Wir setzen also, als Definition dieser Multiplikation:

(3) $$(-a)\ b = -(ab),$$

(4) $$(-a)(-b) = ab,$$

(5) $$0\ b = 0.$$

Die Formel (3) ergibt sich aus (1), wenn man das kommutative Gesetz voraussetzt, und die Formel (4) folgt aus den beiden Annahmen, daß (3) auch noch für negative b gelte, und daß $-(-a)=+a$, d. h. die entgegengesetzte einer negativen Zahl die positive Zahl mit demselben absoluten Werte ist. Die Formel (5) endlich folgt nach dem kommutativen Gesetz aus (2).

In dieser Festsetzung ist für die Multiplikation beliebiger ganzer Zahlen α, β das kommutative Gesetz

$$\alpha\beta = \beta\alpha \tag{6}$$

enthalten, und wir können die Vorschriften (1) bis (5) in die Regel zusammenfassen:

Verschwindet in einem Produkt aus zwei Zahlen der eine Faktor, so verschwindet das Produkt.

Die Multiplikation zweier positiver oder zweier negativer Zahlen gibt ein positives Produkt.

Die Multiplikation einer positiven und einer negativen Zahl gibt eine negative Zahl.

Das associative Gesetz für die Multiplikation lautet

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma) \tag{7}$$

und läßt sich, indem man die einzelnen Fälle der Vorzeichen durchgeht, aus dem Gesetz für positive Zahlen und den Bestimmungen 1. ableiten. Damit ist dann aber auch der allgemeine Satz über ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren:

$$\mu = \alpha\beta\gamma\cdots\nu,$$

wie in § 8, bewiesen, nach dem man bei der Bildung dieser Größe erst zwei beliebige Faktoren vereinigen kann, dann wieder zwei u.s.f., bis man auf eine Zahl gekommen ist, und diese Zahl ist unabhängig von der Anordnung der Rechnung.

2. Man kann hieraus für den Fall, daß in dem Produkt negative Faktoren vorkommen, über das Vorzeichen des Produktes die folgenden Schlüsse ziehen:

Um das Vorzeichen des Produktes zu bestimmen, vereinige man zunächst alle positiven Faktoren zu einem Produkt. Ist nur ein negativer Faktor vorhanden, so hat das Produkt nach 1. einen negativen Wert; sind mehrere negative Faktoren vorhanden, so vereinige man je zwei dieser negativen Faktoren zu einem Produkt, das nach 1. positiv ist. Bleibt alsdann ein negativer ungepaarter Faktor übrig, so ist das Produkt negativ; lassen sich aber alle negativen Faktoren zu Paaren zusammenfassen, so ist das Produkt positiv.

Dies führt uns auf einen Unterschied, den wir unter den natürlichen Zahlen machen müssen. Wenn nämlich eine Menge die Eigenschaft hat, daß ihre Elemente sich ohne Rest paaren lassen, so heißt die Zahl dieser Menge eine gerade oder paarige Zahl. Bleibt aber bei dieser Paarung ein Element übrig, so heißt die Zahl ungerade oder unpaarig.

Eine Zahl kann nicht zugleich gerade und ungerade sein, wie

man leicht durch vollständige Induktion schließt. Auf eine gerade Zahl folgt eine ungerade, auf eine ungerade eine gerade Zahl.

1, 3, 5, 7, 9, 11 sind ungerade, 2, 4, 6, 8, 10, 12 sind gerade Zahlen.

Nach dieser Erklärung können wir die Zeichenregel für ein Produkt so aussprechen:

Ein Produkt ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist, und negativ, wenn die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist.

3. Nachdem das Produkt aus einer beliebigen Anzahl von Faktoren erklärt ist, ergibt sich von selbst der Begriff der Potenz einer negativen Zahl; eine solche Potenz ist positiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, und negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

$$(8) \qquad \begin{aligned} (-a)^n &= a^n, \quad \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ &= -a^n, \quad \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Im besondern ist also das Quadrat einer negativen Zahl immer positiv.

Als besonderen Fall heben wir noch hervor

$$(9) \qquad \begin{aligned} (-1)^n &= +1, \quad \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ &= -1, \quad \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

Diese letzte Formel wird häufig angewandt, um kurz auszudrücken, daß eine von n abhängige Zahl bei geradem n positiv, bei ungeradem n negativ ist. Z. B. kann man darnach die Formel (8) so darstellen

$$(-a)^n = (-1)^n a^n.$$

Dritter Abschnitt.

Division und Einführung der Brüche.

§ 14. Division und Teilbarkeit der Zahlen.

1. Wenn a und b natürliche Zahlen sind, so läßt sich der positive Multiplikator m immer so bestimmen, daß mb größer als a ist.

Wenn nämlich $a = 1$ ist, so ist der Satz offenbar für jedes b richtig; denn da $b \geqq 1$ ist, so braucht man nur $n > 1$ anzunehmen, um $nb > 1$ zu erhalten. Daraus folgt aber, wenn a eine beliebige Zahl ist, $nab > a$, also $mb > a$, wenn $m \geqq na$ ist.

Wenn $b < a$ ist, so wird es unter allen Zahlen, für die $mb > a$ ist, eine kleinste geben. Diese ist größer als 1 und soll mit $q + 1$ bezeichnet werden, so daß

$$qb \leqq a < (q + 1) b$$

ist. Setzen wir also

$$a - qb = r,$$

so wird $r = 0$, falls $qb = a$ ist, sonst positiv und kleiner als b. Daraus ergibt sich:

2. Sind a, b zwei gegebene natürliche Zahlen und $b < a$, so kann man eine positive Zahl q und eine Zahl r, die gleich 0 oder größer als 0, aber kleiner als b ist, so bestimmen, daß

$$a = qb + r \tag{1}$$

wird, und die Zahlen q, r sind durch a und b eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe, die Zahlen q und r aus gegebenen a und b zu bestimmen, heißt die Division von a durch b; a heißt der Dividendus, b der Divisor. Die Zahl q heißt der Quotient, r der Rest.

Man sagt, b ist q mal in a enthalten und der Rest ist r.

Diese Aufgabe ist z. B. zu lösen, wenn es sich, wie häufig im Leben, darum handelt, eine Menge von a unteilbaren Dingen in b

gleiche Teile zu teilen. Im allgemeinen wird dies nicht ohne Rest möglich sein.

Wie die Zahlen q und r gefunden werden, wenn a und b in dekadischer Schreibweise gegeben sind, wird im elementaren Rechenunterricht gelehrt.

3. Wenn der Rest gleich Null ist, so sagt man auch b gehe in a auf, oder a ist durch b teilbar, oder b ist ein Divisor oder Teiler oder ein Faktor von a, die Division von a durch b geht auf, oder endlich a ist ein Vielfaches oder Multiplum von b.

Es ist also a durch b teilbar, wenn es eine ganze Zahl m gibt, durch die die Gleichung

$$a = mb \tag{2}$$

erfüllt wird. Wenn man diese Definition verallgemeinert, können wir sagen:

4. Die Zahl 0 ist durch jede positive oder negative Zahl teilbar. Denn die Gleichung (2) ist für jedes b befriedigt, wenn $a = 0$ und $m = 0$ ist. Die Zahl $-a$ ist durch $+b$ und durch $-b$ teilbar, wenn b von Null verschieden ist und a durch b teilbar ist. Unter den Teilern einer Zahl verstehen wir aber immer nur die natürlichen (positiven) Zahlen.

5. Jede Zahl ist durch sich selbst und durch die Zahl 1 teilbar, denn (2) ist befriedigt, wenn $a = b$ und $m = 1$, und wenn $b = 1$, $a = m$ ist.

6. Keine von Null verschiedene Zahl ist durch Null teilbar. Denn die Gleichung (2) ist für $b = 0$ nur dann erfüllt, wenn $a = 0$ ist. Dann aber kann m jede Zahl sein.

Ferner ergeben sich aus der Definition folgende Sätze:

7. Ein Produkt aus mehreren Faktoren

$$p = a_1 a_2 a_3 \cdots$$

ist durch b teilbar, wenn wenigstens ein Faktor des Produktes durch b teilbar ist. (Es kann aber auch das Produkt durch b teilbar sein, ohne daß einer der Faktoren durch b teilbar ist; $3 \cdot 4$ ist z. B. durch 6 teilbar, ohne daß 3 oder 4 durch 6 teilbar wäre.)

8. Sind zwei Zahlen a und b durch eine dritte c teilbar, so ist auch $a + b$ und $a - b$ durch c teilbar, und dies ist als besonderer Fall in dem allgemeineren Satz enthalten:

Sind mehrere Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle durch b teilbar, und ist

$$a_1 = m_1 b, \quad a_2 = m_2 b, \quad a_3 = m_3 b, \ldots$$

so ist, wenn $c_1, c_2, c_3, \ldots$ beliebige Zahlen sind,

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots = b(m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \cdots),$$

und folglich ist auch die Zahl

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots$$

durch b teilbar.

9. Ist a durch b teilbar und

$$a = mb,$$

so heißt m der Quotient von a und b. Man schreibt auch, um dies anzudeuten,

$$m = a : b \quad \text{oder} \quad m = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad a/b,$$

(in Worten: m ist gleich a geteilt durch b).

§ 15. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Relative Primzahlen. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

1. Wenn zwei natürliche Zahlen a, b durch eine dritte c teilbar sind, so heißt c ein gemeinschaftlicher Teiler von a, b. Da ein Teiler einer Zahl nicht größer als diese Zahl selbst sein kann, so muß es unter allen Teilern zweier Zahlen a, b einen größten geben. Dieser heißt der größte gemeinschaftliche Teiler oder auch das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen a, b, und es ist eine fundamentale Aufgabe der Arithmetik, dieses größte gemeinschaftliche Maß zweier gegebener Zahlen zu finden. Diese Aufgabe löst ein schon Euklid bekanntes Verfahren, das darum der Euklidische Algorithmus oder der Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers heißt, den wir jetzt darlegen wollen[1]).

2. Es seien a und a_1 die beiden gegebenen Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler gesucht ist, die wir als positiv

---

1) Unter einem Algorithmus versteht man heute eine Rechenregel, die ein gesuchtes allgemeines Resultat für jeden besonderen Fall finden lehrt, ohne doch das Endresultat in einer abgeschlossenen Gestalt zu geben. Die Geschichte der Mathematik versteht unter „Algorithmikern" die mathematische Schule, die sich in der Rechnung der indischen Ziffern mit der Null und dem Stellenwert der Ziffern bedient, im Gegensatz zu den „Abacisten", die das Rechenbrett, den Abacus, benutzten. Über den Ursprung des Wortes Algorithmus war man lange im Zweifel, bis neuere Funde es außer Zweifel gesetzt haben, daß das Wort die Entstellung eines arabischen Eigennamens Alchwarizmî (Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî) sei, eines arabischen Schriftstellers, der schon im Beginn des neunten Jahrhunderts das Rechnen mit den indischen Ziffern lehrte. (Cantor, Geschichte der Mathematik. 2. Auflage, Bd. 1, S. 671 f.; Euklid, Elemente, VII. Buch, II. Ausgabe von Heiberg, Bd. II. Leipzig, Teubner 1884.)

voraussetzen. Sind sie einander gleich, so ist ihr Wert zugleich ihr größter gemeinschaftlicher Teiler. Wir nehmen sie also ungleich an und setzen demnach $a > a_1$. Wir dividieren a durch a_1 und bekommen, wenn die Division nicht aufgeht, einen Rest, der kleiner als a_1 ist, und den wir mit a_2 bezeichnen; nun dividieren wir a_1 durch a_2 und bekommen, wenn auch diese Division nicht aufgeht, einen Rest a_3, der kleiner als a_2 ist. Wenn wir so fortfahren, so erhalten wir stets kleinere Reste, und es muß daher nach einer bestimmten Anzahl solcher Divisionen endlich eine Division kommen, die aufgeht, da es nicht ohne Grenzen Zahlen gibt, die kleiner als eine gegebene Zahl a_1 sind. Dann ist aber die Rechnung beendet, und der Divisor der letzten aufgehenden Division, den wir mit a_n bezeichnen wollen, ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler der beiden Zahlen a, a_1. Das Verfahren wird übersichtlicher, wenn man es in den nachstehenden Formeln ausdrückt, in denen die Quotienten der Division mit $q, q_1, \ldots q_{n-1}$ bezeichnet sind.

$$
\begin{aligned}
a &= q a_1 + a_2, \\
a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + a_n, \\
a_{n-1} &= q_{n-1} a_n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Unsere Behauptung geht dahin, daß a_n der größte gemeinschaftliche Teiler von a und a_1 ist. Dies wird bewiesen sein, wenn wir zeigen,

α) daß a_n ein Teiler von a und a_1 ist, und

β) daß jeder Teiler von a und a_1 auch ein Teiler von a_n ist.

Denn ist d der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler, so folgt aus α) $a_n \overline{\lessgtr} d$ und aus β) $a_n \overline{\gtrless} d$, folglich aus beiden zusammen $a_n = d$. Daß aber diese beiden Forderungen α), β) erfüllt sind, lehrt ein Blick auf die Gleichungen (1) mit Rücksicht auf § 14, 8.

Als Korollar ergibt sich daraus noch:

Jeder Teiler zweier Zahlen ist auch Teiler ihres größten gemeinschaftlichen Maßes.

Als Beispiel für diesen Algorithmus mag gelten:

$$
\begin{aligned}
6552 &= 14 \cdot 448 + 280, \\
448 &= \ \ 1 \cdot 280 + 168, \\
280 &= \ \ 1 \cdot 168 + 112, \\
168 &= \ \ 1 \cdot 112 + \ \ 56, \\
112 &= \ \ 2 \cdot \ \ 56.
\end{aligned}
$$

Es ist also 56 der größte gemeinschaftliche Teiler von 6552 und 448.

3. An Stelle der Gleichung

$$a = qb + r$$

kann man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers auch die Gleichung

$$a = (q+1)b - (b-r)$$

benutzen, und dies wird dann vorteilhaft sein, wenn $b - r$ kleiner als r, also $2r$ größer als b ist; in diesem Fall nennt man die negative Zahl $-(b-r)$ den absolut kleinsten Rest der Teilung von a durch b. Setzt man die Rechnung in dem Algorithmus (1) mit diesem absolut kleinsten Reste fort, so kommt man schneller zum Ziel.

In unserem Beispiel würde die Rechnung auch so geführt werden können:

$$\begin{aligned} 6552 &= 15 \cdot 448 - 168, \\ 448 &= 3 \cdot 168 - 56, \\ 168 &= 3 \cdot 56, \end{aligned}$$

und wäre also wesentlich kürzer.

4. Ebenso wie bei zwei Zahlen kann man auch bei mehreren Zahlen nach dem größten gemeinschaftlichen Teiler fragen, worunter die größte unter den Zahlen verstanden wird, die in allen diesen Zahlen enthalten sind. Die Aufgabe, diesen zu finden, kann aber auf die vorige zurückgeführt werden durch die folgende Bemerkung:

Ist d der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Zahlen a, b, so ist jeder Teiler der drei Zahlen a, b, c auch Teiler von d und c, und jeder Teiler von d und c ist auch Teiler von a, b, c. Demnach ist auch der größte gemeinschaftliche Teiler von d und c zugleich der größte gemeinschaftliche Teiler von a, b, c.

5. Zwei Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler gleich 1 ist, die also außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen relative Primzahlen (relativ prime Zahlen wäre sprachlich korrekter, die eine ist relativ prim zur anderen) oder teilerfremde Zahlen. Mann sagt wohl auch, indem man den selbstverständlichen Teiler 1 nicht mitrechnet, Zahlen ohne gemeinsamen Teiler.

Solche teilerfremde Zahlen sind z. B. 3 und 7, 15 und 49, 105 und 128. Ob zwei vorgelegte Zahlen a, b teilerfremd sind oder nicht, kann man immer, und zwar auch bei großen Zahlen durch eine verhältnismäßig einfache Rechnung entscheiden.

6. Es gilt nun der folgende wichtige Fundamentalsatz über relative Primzahlen:

Sind a und b teilerfremd und ist ein Vielfaches ma von a durch b teilbar, so ist m durch b teilbar.

Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes aus dem Algorithmus (1), wenn man annimmt, daß a und $b = a_1$ relativ prim sind. Dann muß sich $a_n = 1$ ergeben, also

$$(2) \qquad \begin{aligned} a &= q\; a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1\; a_2 + a_3, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1, \end{aligned}$$

und durch Multiplikation aller dieser Formeln mit m:

$$(3) \qquad \begin{aligned} ma &= q\; ma_1 + ma_2, \\ ma_1 &= q_1\; ma_2 + ma_3, \\ &\cdots\cdots \\ ma_{n-2} &= q_{n-2} m a_{n-1} + m. \end{aligned}$$

Ist nun ma durch a_1 teilbar, so folgt aus der ersten Gleichung, daß auch ma_2 durch a_1 teilbar ist, ferner aus der zweiten, daß auch ma_3 durch a_1 teilbar ist, und so successive (vollständige Induktion), daß alle $ma_1, ma_2, ma_3, \ldots, ma_{n-1}, m$ durch a_1 teilbar sein müssen. Darin ist aber der zu beweisende Satz enthalten.

Sind a und b zwei Zahlen mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler d, und ist

$$(4) \qquad a = da', \quad b = db',$$

so sind a' und b' teilerfremd. Denn hätten diese beiden Zahlen noch einen gemeinschaftlichen Teiler e, so wäre ja a und b durch de teilbar, was unmöglich ist, wenn $e > 1$ ist.

7. Eine Zahl, die durch jede der beiden Zahlen a, b teilbar ist, heißt ein gemeinschaftliches Vielfaches (Multiplum) der beiden Zahlen a und b. Unter allen gemeinschaftlichen Vielfachen dieser beiden Zahlen muß eines das kleinste sein, und alle anderen sind durch dieses kleinste teilbar.

Denn ist eine Zahl m durch a und durch b teilbar, so ist sie auch (in der Bezeichnung (4)) durch da' teilbar, hat also die Form

$$m = da'n.$$

Soll diese Zahl noch durch db' teilbar sein, so muß $a'n$ durch b' und folglich, da a' und b' relativ prim sind (nach Nr. 6), n durch b' teilbar sein. Ist $n = b'p$, so ist

$$m = da'b'p.$$

Es ist also jede durch a und durch b teilbare Zahl durch $da'b' = ab/d$ teilbar und ab/d ist daher das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der beiden Zahlen a und b.

Dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist also bekannt, sobald der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b ermittelt ist.

8. Ebenso wie beim größten gemeinschaftlichen Teiler können wir auch den Begriff des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen auf ein System von mehr als zwei Zahlen übertragen. Man erhält das kleinste gemeinschaftliche Vielfache irgend eines Zahlensystems

$$a, b, c, d, \ldots$$

dadurch, daß man irgend zwei dieser Zahlen, etwa a, b, herausgreift und durch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches ersetzt. Dadurch ist das System um eine Zahl verkürzt. Mit diesem verkürzten System verfährt man ebenso, und fährt damit so lange fort, bis nur eine einzige Zahl übrig geblieben ist.

§ 16. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

Eine natürliche Zahl, die außer sich selbst und der Einheit keinen Teiler hat, heißt eine Primzahl. Zahlen, die mehr Faktoren haben, heißen zusammengesetzte Zahlen. Die Zahl 1 nimmt eine Ausnahmestellung ein; sie ist die einzige, die nur **einen** Divisor hat, während alle anderen mindestens zwei Teiler haben. Es ist in mancher Hinsicht zweckmäßig, die Zahl 1 nicht mit zu den Primzahlen zu rechnen, so daß man dreierlei Arten von Zahlen zu unterscheiden hat: die Einheit, die Primzahlen und die zusammengesetzten Zahlen.

Es ist dies natürlich eine reine Zweckmäßigkeitsfrage, und es wird auch in der Tat häufig die Einheit mit zu den Primzahlen gerechnet, wie es auf den ersten Blick natürlicher erscheint. Wir wollen aber die Unterscheidung zwischen der Einheit und den Primzahlen machen, weil sich dann manche Sätze kürzer aussprechen lassen.

Es gelten von den Primzahlen folgende Sätze:

1. Wenn ein Produkt zweier Zahlen ab durch eine Primzahl p teilbar ist, so muß wenigstens der eine der Faktoren a, b durch p teilbar sein.

Denn wenn a nicht durch p teilbar ist, so sind a und p relativ prim, weil p eben keinen anderen Teiler als p und 1 hat. Wenn daher ab durch p teilbar ist, so ist nach § 15, 6. b durch p teilbar.

Der Satz läßt sich ohne weiteres dahin verallgemeinern:

Ist ein Produkt aus mehreren Faktoren $a, b, c, d, \ldots$ durch eine Primzahl p teilbar, so ist wenigstens einer der Faktoren durch p teilbar.

2. Jede zusammengesetzte Zahl m ist auf eine und nur auf eine Weise als ein Produkt aus Primzahlen dar-

stellbar, oder wie man sich auch ausdrückt, in Primfaktoren zerlegbar.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß jede zusammengesetzte Zahl m wenigstens durch eine Primzahl teilbar ist. Denn ist m zusammengesetzt, so hat es einen Teiler, m_1, der kleiner als m und größer als 1 ist. Ist m_1 selbst noch zusammengesetzt, so muß es wieder einen kleineren Teiler m_2 haben, und wir kommen also, wenn wir diesen Schluß fortsetzen, endlich zu einem Teiler, der eine Primzahl sein muß. Ist also p ein Primteiler von m und

$$m = p_1 m_1, \tag{1}$$

so ist m_1 kleiner als m, und muß, wenn es keine Primzahl ist, wieder einen Primteiler p_2 haben. Ist dann

$$m = p_1 p_2 m_2, \tag{2}$$

so können wir ebenso weiter schließen, und gelangen wiederum dazu, daß endlich einer der Faktoren $m_1, m_2, \ldots$ eine Primzahl sein muß, da es nicht ohne Ende Zahlen gibt, die kleiner als eine gegebene Zahl m sind. Demnach gibt es eine Zerlegung von m in Primfaktoren, deren Anzahl n sei:

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n. \tag{3}$$

Unter den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ kann natürlich auch dieselbe mehrmals vorkommen, und diese Faktoren lassen sich dann zu einer Potenz zusammenfassen. Wir setzen dann, wenn π mal die Primzahl p, $\varkappa$ mal die Primzahl q, ϱ mal die Primzahl r darunter vorkommt u. s. f., so daß $\pi + \varkappa + \varrho + \cdots = n$ ist,

$$m = p^\pi q^\varkappa r^\varrho \ldots, \tag{4}$$

worin jetzt die Primzahlen $p, q, r \ldots$ voneinander verschieden angenommen sind.

Daraus folgt dann auch leicht, daß diese Zerlegung nur auf eine Weise möglich ist. Denn nach 1. kann in der durch die Formel (4) zerlegten Zahl m keine andere Primzahl aufgehen, als $p, q, r, \ldots$ und die Primzahl p kann nicht öfter als π mal, q nicht öfter als $\varkappa$ mal darin aufgehen.

3. Die Menge der Primzahlen ist unendlich[1]).

Wäre die Menge aller existierenden Primzahlen endlich, so müßte es eine größte geben. Nehmen wir also an, es sei ω die größte Primzahl. Dann lassen sich die sämtlichen existierenden Primzahlen 2, 3, 5, 7, ... in eine Reihe $a, b, c, \ldots$ ordnen, deren letzte ω ist.

1) Dieser Satz und sein Beweis findet sich schon bei Euklid, Elemente, Buch IX. No. XX (Heiberg, Bd. 2).

Wir bilden aus allen diesen Zahlen das Produkt und addieren die Einheit dazu:

$$\Omega = abc \cdots \omega + 1; \tag{5}$$

diese Zahl Ω ist größer als ω und kann doch durch keine Primzahl der Reihe $a, b, c, \ldots \omega$ teilbar sein; denn bei der Division von Ω durch jede dieser Primzahlen bleibt der Rest 1. Unsere Voraussetzung, daß ω die größte Primzahl sei, ist also unzulässig.

Nimmt man in (5) für ω irgend eine bestimmte Primzahl, so wird Ω größer als ω, aber durch keine Primzahl unter ω teilbar. Es muß also Ω entweder selbst eine Primzahl sein, oder durch eine Primzahl über ω teilbar sein. Beides kann vorkommen, z. B.:

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \text{ zusammengesetzt.}$$

Die Auffindung der Primteiler einer zusammengesetzten Zahl oder die Entscheidung darüber, ob eine vorgelegte Zahl Primzahl sei oder nicht, ist weit schwieriger als etwa die Auffindung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier gegebenen Zahlen. Eine allgemeine direkte Methode zur Lösung dieser Aufgabe besitzen wir nicht, wie denn überhaupt die Erforschung der Verteilungsgesetze der Primzahlen zu den tiefsten Problemen der Arithmetik gehört. Wir werden in einem späteren Abschnitt noch einiges über diese Frage beibringen. Für jetzt mag noch folgendes bemerkt werden.

4. Ob eine gegebene Zahl m durch die ersten Primzahlen 2, 3, 5 teilbar ist, dafür gibt es einfache Kennzeichen, wenn die Zahl m dekadisch geschrieben ist. Es sei nämlich, wenn die Zahl m mit n Ziffern geschrieben wird,

$$\begin{aligned} m &= a_1 a_2 \ldots a_n \\ &= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} 10 + a_n. \end{aligned}$$

Da nun 10 und alle seine Potenzen durch 2 und durch 5 teilbar sind, so wird m durch 2 oder durch 5 teilbar sein, wenn a_n, d. h. die letzte Ziffer von m, durch 2 oder durch 5 teilbar ist.

Zur Vervollständigung können wir noch beifügen, da 100 durch 4 und durch 25 teilbar ist, daß m durch 4 oder durch 25 teilbar sein wird, wenn $a_{n-1} 10 + a_n$, d. h. die aus den beiden letzten Ziffern $a_{n-1} a_n$ von m dekadisch geschriebene Zahl durch 4 oder durch 25 teilbar

ist. Und auf dieselbe Weise lassen sich Kriterien der Teilbarkeit durch 8 oder durch 125 angeben und ähnlich mit höheren Potenzen von 2 oder von 5.

Bezeichnen wir ferner mit q die sogenannte Quersumme von m, d. h. die Summe der Ziffern ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert:

$$q = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

so ist

$$m - q = a_1 (10^{n-1} - 1) + a_2 (10^{n-2} - 1) + \cdots + a_{n-1} (10 - 1),$$

und da nun

$$10 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 99, \quad 10^3 - 1 = 999, \ldots$$

alle durch 9 teilbar sind, so ist auch $m - q$ durch 9 teilbar. Wenn also von den beiden Zahlen m, q die eine durch 3 oder durch 9 teilbar ist, so gilt das Gleiche von den anderen, und wir erhalten die Regel:

Eine Zahl m ist durch 3 oder durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 oder durch 9 teilbar ist. Ähnlich ergibt sich, wenn wir mit q' die Summe

$$q' = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots \pm a_1$$

bezeichnen,

$$m - q' = a_{n-1} (10 + 1) + a_{n-2} (10^2 - 1) + a_{n-3} (10^3 + 1) + \cdots$$

und da nun $10 + 1 = 11$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 + 1 = 1001, \ldots$ durch 11 teilbar sind, so ergibt sich, daß m gleichzeitig mit q' durch 11 teilbar ist oder nicht.

5. Wenn die Zahl m keine Primzahl ist, so kann sie in zwei Faktoren zerlegt werden, deren jeder größer als 1 ist. Ist also $m = ab$ und $a \overline{\overline{<}} b$, so ist

$$a^2 \overline{\overline{<}} m,$$

und es muß also unter den Faktoren von m wenigstens einen geben, dessen Quadrat nicht größer ist als m. Um also festzustellen, ob eine vorgelegte Zahl m eine Primzahl ist oder nicht, wird man zunächst nach Nr. 4 untersuchen, ob sie durch 2, 3, 5, 11 teilbar ist. Ist das nicht der Fall, so dividiert man weiter durch alle Primzahlen, deren Quadrat nicht größer ist als m, die man als bekannt voraussetzen muß, und wenn alle diese Divisionen nicht aufgehen, so ist sie gewiß eine Primzahl. Geht aber eine dieser Divisionen auf, so hat man den Quotienten, der dann jedenfalls kleiner ist als m, in der gleichen Weise weiter zu untersuchen. Wenn also z. B. eine Zahl unter 100 durch 2, 3, 5, 7 nicht teilbar ist, so ist sie eine Primzahl. Desgleichen hat man bei Zahlen bis zu 10 000 nur die Divisionen mit den Primzahlen unter 100 zu versuchen u. s. f.

6. Die Frage nach der Ermittelung der Primzahlen hat schon die Mathematiker des Altertums beschäftigt. Wir haben schon erwähnt, daß Euklid Sätze über Primzahlen beweist. Von Eratosthenes ist uns unter dem Namen „Sieb“ (*κόσκινον*, cribrum Eratosthenis) ein Bruchstück erhalten, in dem eine sinnreiche Methode gelehrt wird, um alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Grenze zu ermitteln[1]), die in folgendem besteht.

Man schreibe alle Zahlen bis zu der vorgeschriebenen Grenze der Reihe nach auf und beginne dann von der ersten Primzahl 2 an jede zweite Zahl durchzustreichen. Dann sind alle Vielfachen von 2 (nicht aber 2 selbst) durchgestrichen. Hierauf zähle man von der nächsten stehen gebliebenen Zahl, also von 3 an weiter, die bereits durchstrichenen Zahlen mitzählend, und durchstreiche jede dritte Zahl, und so fahre man fort, immer von der nächstfolgenden nicht durchstrichenen Zahl an soviel weiter zu zählen und durchzustreichen, als diese Zahl angibt. Was schließlich noch stehen geblieben ist, sind allein die Primzahlen. Nach 5. braucht man damit aber nur so lange fortzufahren, als das Quadrat der Ausgangszahl einer Zählung nicht größer ist als die größte Zahl der Reihe. So hätte man z. B. bei der Ermittelung der Primzahlen unter $121 = 11^2$ nur die Vielfachen von 2, 3, 5, 7 zu durchstreichen. Es empfiehlt sich, um das Verfahren vollständig klar zu machen, diese Abzählung etwa für die Zahlen bis 100 wirklich durchzuführen.

Die Anwendung des Siebes sowohl als die unmittelbare Division durch die bekannten Primzahlen hat natürlich bei großen Zahlen bald eine Grenze erreicht, über die sie der allzugroßen Rechnungen wegen nicht mehr zum Ziele führen können. Die Ermittelung der Teiler sehr großer Zahlen oder die Entscheidung darüber, ob sie Primzahlen sind, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Mathematik. Man hat sich darum bemüht, die Faktoren der Zahlen und die Primzahlen unter einer gewissen Grenze in Tabellen zusammenzustellen. Man hat jetzt solche Faktorentafeln bis zur 9ten Million einschließlich[2]). Die Anzahl der Primzahlen unter hundert beträgt 15, derer unter tausend 168, unter neun Millionen gibt es nach der Zählung von Glaisher 602 567 Primzahlen. Insoweit also als man sich auf die Korrektheit der Tafeln verlassen kann, sind die Prim-

1) Eratosthenes von Kyrene lebte etwa von 275 bis 194 v. Chr. meist in Alexandria. (Vgl. Cantor, Gesch. d. Mathematik, Bd. I, S. 313 f.)

2) Solche Tafeln sind von L. Chernac berechnet bis 1 020 000, von J. Ch. Burckhardt bis 3 036 000, von Z. Dase für die 7te bis 9te Million, von Glaisher für die 4te bis 6te Million. Eine kleinere Tafel für den Handgebrauch (bis zu 400 000) findet sich in der „Sammlung mathematischer Tafeln“ nach Vega, herausgegeben von Hülsse. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1865.

zahlen unter neun Millionen als bekannt anzusehen. Da aber jedes Menschenwerk Irrtümern unterworfen sein kann, und ein so gewaltiges Rechnungsmaterial gewiß nicht von vielen nachgeprüft werden wird, wird immerhin noch einige Vorsicht geboten sein. Über diese Grenze hinaus sind nur noch vereinzelte Primzahlen bekannt; die größte von ihnen ist

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951\,[1]).$$

Zur Zerlegung sehr großer Zahlen hat man die Hilfsmittel der höheren Arithmetik herangezogen, im besonderen die Theorie der quadratischen Formen, wovon später ein einfaches Beispiel ausgeführt werden soll.

§ 17. Brüche.

1. Die Aufgabe der Division einer Zahl a durch eine andere Zahl b kann, wenn a durch b teilbar ist, so gefaßt werden: Es soll eine Zahl c gefunden werden, mit der man die gegebene Zahl b multiplizieren muß, um die gleichfalls gegebene Zahl a zu erhalten.

In diesem Sinne kann die Division als die Umkehrung der Operation der Multiplikation bezeichnet werden. Wie wir aber früher die Umkehrung der Addition verallgemeinert haben, und dadurch zur Einführung einer neuen Zahlenart, der negativen Zahlen, gedrängt wurden, so können wir auch die Aufgabe der Division verallgemeinern, aber nur wenn wir das Reich der Zahlen abermals erweitern und neben den bisher benutzten ganzen Zahlen die gebrochenen Zahlen oder Brüche einführen. Dies geschieht, indem wir uns zunächst in formaler Weise ein Begriffssystem bilden und eine Vorschrift des Rechnens feststellen. Aber dieses neue Zahlensystem ist dann wiederum geeignet, um gewisse Beziehungen der Dinge der Außenwelt darzustellen oder abzubilden.

2. Zu dem Begriff eines Bruches gelangen wir am einfachsten auf folgendem Wege. Es sei m ein Zeichen, das jede Zahl der ganzen Zahlenreihe bedeuten kann (Null, positiv, negativ) und n ein Zeichen für eine positive Zahl. Das aus diesen beiden Zeichen zusammengesetzte Zeichen m/n oder $\frac{m}{n}$ (gesprochen: m geteilt durch n oder m über n) ist also durch irgend zwei Zahlen m und n vollständig bestimmt. Wir wollen es eine gebrochene Zahl oder einen Bruch nennen und darüber folgende Festsetzungen treffen:

---

1) Dies ist zuerst von Selhof konstatiert und später von anderen bestätigt worden. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 31. Jahrgang, S. 174.)

m heißt der Zähler, n der Nenner des Bruches.

Ist der Nenner z. B. 2, 3, 4, ... 10, so heißt der Bruch m Halbe, m Drittel, m Viertel, ... m Zehntel.

Die beiden Zeichen m/n und qm/qn sollen, wenn q eine beliebige (positive) Zahl ist, dasselbe bedeuten oder den gleichen Wert haben.

Danach kann ein gemeinsamer Teiler im Zähler und Nenner eines Bruches weggelassen werden, ohne daß der Bruch in seinem Wert geändert wird. (2/3 ist z. B. dasselbe wie 4/6 oder wie 10/15 u. s. f.)

Die Unterdrückung eines gemeinschaftlichen Teilers, also das Ersetzen von qm/qn durch m/n, heißt den Bruch mit q heben. Die umgekehrte Operation, d. h. das Ersetzen von m/n durch qm/qn, heißt den Bruch mit q erweitern.

Es gibt nach dieser Festsetzung für jeden Bruch eine gewisse einfachste Form, die man auch die reduzierte Form nennt, die man erhält, wenn man den größten gemeinschaftlichen Teiler von Zähler und Nenner hebt. In einem reduzierten Bruch sind Zähler und Nenner relative Primzahlen.

Wir können zwei oder mehr Brüche immer so darstellen, daß der Nenner in beiden derselbe wird. Wir brauchen nur als gemeinschaftlichen Nenner irgend ein gemeinschaftliches Vielfaches m der einzelnen Nenner zu nehmen, und dann durch Erweiterung die gegebenen Brüche alle auf diesen Nenner zu bringen. Z. B. können wir drei beliebige Brüche a/a_1, b/b_1, c/c_1 so darstellen, wenn wir $n = a_1 b_1 c_1$ setzen:

$$(1) \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{a b_1 c_1}{n}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{b c_1 a_1}{n}, \quad \frac{c}{c_1} = \frac{c a_1 b_1}{n}.$$

3. Wir setzen nun fest, daß von zwei Brüchen mit demselben Nenner der der größere sein soll, der den größeren Zähler hat.

Diese Festsetzung ist verträglich mit der Bestimmung 2. Denn durch Erweiterung oder Hebung der Brüche wird in deren Größenfolge nichts geändert. Auch ist die Grundvoraussetzung für jede Größenordnung befriedigt: Sind α, β, γ drei Brüche und α größer als β, β größer als γ, so ist auch α größer als γ. Wir können die Größenbestimmung auch in die Formel zusammenfassen:

Sind $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$ zwei Brüche, so ist α kleiner als β, gleich β oder größer als β, je nachdem

$$(2) \qquad \begin{aligned} a b_1 &> b a_1 \text{ oder} \\ a b_1 &= b a_1 \text{ oder} \\ a b_1 &< b a_1. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich, wenn man die beiden Brüche mit dem gemeinsamen Nenner $a_1 b_1$ darstellt:

$$\alpha = \frac{a b_1}{a_1 b_1}, \quad \beta = \frac{b a_1}{a_1 b_1}.$$

4. Um die ganzen Zahlen unter die Reihe der gebrochenen Zahlen einzuordnen, setzen wir fest, daß ein Bruch mit dem Nenner 1 der ganzen Zahl, die den Zähler bildet, gleich sein soll, also

$$\frac{a}{1} = a. \tag{3}$$

Es ist dann die früher festgesetzte Größenordnung der ganzen Zahlen in der für die Brüche geltenden enthalten.

Hierdurch ist die Gesamtheit der gebrochenen Zahlen mit Einschluß der ganzen positiven und negativen Zahlen in eine Reihe geordnet, die wir die Reihe der rationalen Zahlen nennen. Ebenso wie bei den ganzen Zahlen unterscheiden wir auch bei den rationalen Zahlen die absolute Größe von der algebraischen Größe. Bei der absoluten Größe werden nur die absoluten oder positiven Werte miteinander verglichen, während bei der algebraischen Anordnung die negativen Zahlen immer kleiner sind als die positiven, und von zwei negativen die die größere ist, die den kleineren absoluten Wert hat. Ein Bruch, dessen absoluter Wert kleiner als 1 ist, heißt ein echter Bruch. Ein echter Bruch ist also ein solcher, dessen Zähler dem absoluten Werte nach kleiner als der Nenner ist.

5. Um ein anschauliches Bild und zugleich eine wichtige Anwendung der Brüche auf reale Dinge zu erhalten, denke man sich auf einer Linie, wie auf einem Maßstab, Punkte in gleichen Abständen, etwa im Abstand eines Centimeters, markiert, diesen Abstand nennen wir die Längeneinheit, bezeichnen einen beliebigen dieser Punkte mit 0 und zählen auf der Linie nach rechts die positiven ganzen Zahlen $+1, +2, +3, \cdots$, nach links die negativen $-1, -2, -3, \cdots$. Dann teilen wir jedes Intervall in eine bestimmte Anzahl, etwa n, gleiche Teile und zählen auf den so gewonnenen Teilpunkten (mit Einschluß der ersteren) wieder die Zahlen $+1, +2, +3, \cdots$ nach rechts und $-1, -2, -3, \cdots$ nach links. Diese Punkte geben dann ein Bild der Größenordnung aller der Brüche, die den Nenner n haben oder durch Heben oder Erweitern auf den Nenner n gebracht werden können. In den Anwendungen wird gewöhnlich $n = 10$ oder gleich einer Potenz von 10 angenommen.

6. Aus 3. (2) folgt, daß von zwei positiven Brüchen mit demselben Zähler der der kleinere ist, der den größeren

Nenner hat. Denn wenn $a = b$ und $a_1 > b_1$, so ist $ab_1 < ba_1$. Man kann daher beliebig viele Brüche finden, deren absoluter Wert kleiner ist als der eines gegebenen Bruches. So wird der Bruch $1/n$ um so kleiner je größer n ist, und man kann, wenn a/b ein beliebig gegebener positiver Bruch ist, n so groß annehmen, daß $1/n < a/b$. Dieser Satz ist ein besonderer Fall des allgemeineren:

Sind α, β zwei beliebige ungleiche rationale Zahlen, so kann man beliebig viele gebrochene Zahlen finden, die der Größe nach zwischen α und β liegen.

Es sei nämlich $\alpha > \beta$ und

$$\alpha = \frac{a}{a_1}, \quad \beta = \frac{b}{b_1},$$

also $ab_1 > ba_1$ und folglich $ab_1 - ba_1$ eine positive ganze Zahl. Man kann daher den Multiplikator q so bestimmen, daß $q(ab_1 - ba_1)$ größer als 1 oder als eine beliebige Zahl r wird (§ 14, 1.), und daß also beliebig viele ganze Zahlen zwischen qab_1 und qba_1 liegen. Ist x eine solche Zahl, so ist

$$qab_1 > x > qba_1$$

und folglich

$$\frac{a}{a_1} > \frac{x}{q\,a_1\,b_1} > \frac{b}{b_1}.$$

Bei der obigen Darstellung der rationalen Zahlen durch die Teilpunkte eines Maßstabes verbindet sich mit dem Begriff des Abnehmens der absoluten Werte die Vorstellung von einer immer kleiner werdenden Strecke, und ähnlich ist es bei allen Anwendungen der gebrochenen Zahlen auf reale Dinge. Begrifflich liegt aber in der getroffenen Festsetzung über die Größenordnung nichts von einer objektiven Kleinheit oder Größe.

7. Wir haben bisher den Bruch m/n nur für positive Nenner n erklärt, und im Grunde genommen ist dies auch ausreichend. Manchmal ist es aber zweckmäßig, auch negative Nenner zuzulassen. Wir erklären daher diese Brüche durch die Gleichung:

$$\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n}. \tag{4}$$

Nur die Zahl Null wollen wir als Nenner nicht benutzen.

§ 18. Rechnen mit Brüchen.

1. Um Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, bringt man sie nach § 17, 2. auf denselben Nenner. Dieser gemeinsame Nenner, der auch der Hauptnenner heißt, ist ein gemeinsames Vielfaches der Nenner der gegebenen Brüche, und wenn die gegebenen Brüche reduziert sind, wird es das Einfachste sein, als Hauptnenner das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner zu nehmen. Diese Operation heißt auch das Einrichten der Brüche.

Wenn nun

$$\alpha = \frac{a}{n}, \quad \beta = \frac{b}{n}$$

ist, so definieren wir als Summe und als Differenz

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{n}, \quad \alpha - \beta = \frac{a-b}{n}. \tag{1}$$

So erhält man als Summe und als Differenz von irgend zwei Brüchen wieder einen Bruch, der aber nicht notwendig die reduzierte Form hat (z. B. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$). Das Resultat ist aber unabhängig von der besonderen Form, in der α, β angenommen sind; denn wenn wir α und β mit q erweitern, so erscheint auch $\alpha \pm \beta$ in einer durch q erweiterten Form.

Hiernach ist die Bildung von Summen aus beliebig vielen gebrochenen Zahlen von selbst klar, und auch die Gesetze, die wir in dem § 7 und § 12 für das Rechnen mit ganzen Zahlen kennen gelernt haben, gelten unverändert hier. Es ist überhaupt das Rechnen mit Brüchen, sofern es sich nur um Addition und Subtraktion einer bestimmten Anzahl von Brüchen handelt, nichts anderes als das Rechnen mit ganzen Zahlen, angewandt auf eine bestimmte Art von Dingen, deren Einheit $1/n$ heißt. Das was dem Bruchrechnen eigentümlich ist, ist nur das vorläufige Einrichten der Brüche und zuletzt im Endresultat das Heben überflüssiger Faktoren.

2. Multiplikation. Unter dem Produkt zweier Brüche a/a_1 und b/b_1 verstehen wir den Bruch ab/a_1b_1. Es ergibt sich daraus also die Vorschrift, die wir gleich auf das Produkt aus beliebig vielen Faktoren ausdehnen können:

Um Brüche zu multiplizieren, multipliziert man sämtliche Zähler und sämtliche Nenner miteinander. Das Produkt der Brüche ist ein Bruch, der zum Zähler das Produkt der Zähler und zum Nenner das Produkt der Nenner hat.

Im Resultat kann man natürlich unter Umständen gemeinsame Faktoren im Zähler und im Nenner heben. Die Multiplikation ganzer Zahlen ist als Spezialfall in dieser Multiplikation enthalten. Daß das

kommutative und das associative Gesetz auch für diese Art der Multiplikation gilt, ist eine unmittelbare Folge der Definition, weil diese Gesetze im Zähler und im Nenner des Produktes gelten.

Für die Zeichenbestimmung gilt dieselbe Regel, wie bei der Multiplikation ganzer Zahlen, nämlich, daß das Produkt positiv oder negativ ist, je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren gerade oder ungerade ist.

Ein Produkt ist auch hier $= 0$, wenn ein Faktor $= 0$ ist.

Eine Abweichung findet aber in Bezug auf die Ordnung der absoluten Größe statt. Es gilt nämlich hier der Satz:

Das Produkt $\alpha\beta$ ist dem absoluten Werte nach kleiner oder größer als α, je nachdem β ein echter oder ein unechter Bruch ist. Denn setzen wir $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$, so ist $\alpha\beta$ nach § 17, 3. kleiner oder größer als α, je nachdem

$$aa_1 b < aa_1 b_1 \text{ oder } > aa_1 b_1,$$

also, wenn a, a_1 positiv vorausgesetzt werden, je nachdem $b < b_1$ oder $b > b_1$, d. h. je nachdem β ein echter oder ein unechter Bruch ist.

3. Sind α, β, γ Brüche, so kann, wenn γ von Null verschieden ist, nur dann $\alpha\gamma = \beta\gamma$ sein, wenn $\alpha = \beta$ ist. Dies ergibt sich aus § 17, 3. Denn ist $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$, $\gamma = c/c_1$, so ist, wenn $\alpha\gamma = \beta\gamma$ ist:

$$acb_1 c_1 = bca_1 c_1,$$

und da c und c_1 von Null verschieden sind, so folgt hieraus nach dem Schlußsatz von § 8

$$ab_1 = ba_1$$

oder $\alpha = \beta$.

4. Division. Nun können wir in der so erweiterten Zahlenreihe die Aufgabe der Division allgemein stellen und lösen.

Es seien α, β zwei gegebene rationale Zahlen. Es wird eine Zahl ξ gesucht, mit der man β multiplizieren muß, um α zu erhalten, also eine Zahl, die der Bedingung

$$\alpha = \xi\beta \tag{2}$$

genügt. Die Aufgabe hat offenbar keine Lösung, wenn $\beta = 0$ und α nicht $= 0$ ist, weil dann das Produkt $\xi\beta$ für jedes ξ den Wert 0 hat. Sind aber α und β beide $= 0$, so ist jede beliebige Zahl ξ eine Lösung der Aufgabe. Ist aber β nicht $= 0$, so kann die Aufgabe nur eine Lösung haben. Denn angenommen, sie hätte zwei Lösungen ξ und ξ', so müßte $\xi\beta = \xi'\beta$ sein, was nach 3. nicht möglich ist, wenn ξ von ξ' verschieden ist.

Es handelt sich also nur noch darum, irgend eine Lösung von

(2) zu ermitteln. Diese ergibt sich aber, wenn wir $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$, setzen:

$$\xi = \frac{ab_1}{ba_1}, \tag{3}$$

denn dann ist

$$\xi\beta = \frac{ab_1 b}{ba_1 b_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Wir nennen die Bildung der Zahl ξ die Division von α durch β und α den Dividendus, β den Divisor, ξ den Quotienten.

Für den Fall, daß α und β ganze Zahlen sind, erhalten wir für ξ einen Bruch und wenn β in α aufgeht, eine ganze Zahl. Die Aufgabe, ganze Zahlen ohne Rest zu dividieren, kann also im allgemeinen nur durch Brüche gelöst werden, und ist als Spezialfall in der Division von Brüchen enthalten.

Wir bezeichnen die Lösung der Divisionsaufgabe (2) auch so:

$$\alpha : \beta, \quad \alpha/\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ab_1}{ba_1} \tag{4}$$

(α geteilt durch β, α über β) und fassen das in 4. enthaltene Resultat in die Regel zusammen:

Um zwei Brüche zu dividieren, multipliziert man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors und nimmt das erste dieser Produkte als Zähler, das zweite als Nenner des Resultates.

Man nennt auch in (4) α den Zähler, β den Nenner des Bruches α/β.

Der Bruch $1/\alpha$ heißt der reziproke Wert von α. Man erhält ihn, wenn man den Bruch α „umkehrt", d. h. den Nenner zum Zähler und den Zähler zum Nenner macht.

Es läßt sich dann die Division auf die Multiplikation zurückführen nach der Vorschrift:

5. Um einen Bruch α durch einen Bruch β zu dividieren, hat man α mit dem reziproken Werte von β zu multiplizieren.

Daß die Gleichung (2) für $\beta = 0$ entweder gar keine oder eine ganz unbestimmte Lösung hat, ist der Grund, warum man in der Arithmetik die Division durch Null und damit Brüche mit dem Nenner Null ein für allemal ausschließt. In gewissen Teilen der höheren Analysis ist es dagegen zweckmäßig, auch dem Zeichen 1/0 eine Bedeutung beizulegen.

6. Potenzierung. Nachdem der Begriff der Multiplikation festgestellt ist, ergibt sich die Potenzierung von selbst. Es ist, wenn α ein Bruch und n eine natürliche Zahl ist, α^n ein Produkt aus n Faktoren, die alle gleich α sind. α heißt die Basis, n der Ex-

ponent, α^n die n^{te} Potenz von α. Diese Ausdrücke sind aber nur erklärt, so lange der Exponent eine positive ganze Zahl ist. Wir erweitern aber jetzt den Begriff, indem wir ihn auf negative Exponenten und auf den Exponenten 0 ausdehnen. Dies gelingt am besten, wenn wir der fundamentalen Gleichung

$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{5}$$

die sich für positive ganzzahlige m und n aus der Definition ergibt, allgemeine Gültigkeit zuschreiben.

Setzen wir demnach in (5) $n = 0$, so folgt

$$\alpha^m \alpha^0 = \alpha^m$$

und daraus, wenn α und folglich α^m von Null verschieden ist, was wir jetzt voraussetzen wollen,

$$\alpha^0 = 1. \tag{6}$$

Setzen wir dann aber in (5) $n = -m$, so folgt

$$\alpha^m \alpha^{-m} = \alpha^0 = 1,$$

also

$$\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}. \tag{7}$$

7. Wenn also die Formel (5) allgemeine Gültigkeit haben soll, so muß α^0 gleich 1 und α^{-m} der reziproke Wert von α^m sein.

Die Gleichung $1^m = 1$ gilt auch nach dieser Erweiterung allgemein.

8. Ist α ein unechter Bruch, so wächst α^n zugleich mit n, wie sich aus der Erklärung der Potenz durch wiederholte Multiplikation ergibt. Wir können aber dieses Wachsen jetzt noch etwas genauer bestimmen.

Ist p eine positive ganze Zahl und größer als 1, so ist α^p größer als α und wir können eine Zahl γ zwischen α^p und α einschieben, die also der Bedingung

$$\alpha^p > \gamma > \alpha$$

genügt. Daraus ergibt sich nun durch Multiplikation mit α:

$$\alpha^{p+1} > \gamma\alpha = \gamma + \gamma(\alpha - 1) > \gamma + \alpha(\alpha - 1) > \alpha.$$

Wendet man dasselbe Verfahren nochmals an, indem man p durch $p + 1$ und γ durch $\gamma + \alpha(\alpha - 1)$ ersetzt, so folgt

$$\alpha^{p+2} > \gamma + 2\alpha(\alpha - 1),$$

und durch vollständige Induktion für jede ganze positive Zahl n

$$\alpha^{p+n} > \gamma + n\alpha(\alpha - 1). \tag{8}$$

Da nun $\alpha(\alpha-1)$ positiv ist, so kann man n so groß annehmen, daß $\gamma + n\alpha(\alpha-1)$ größer ist als eine beliebig gegebene Größe c. Daraus ergibt sich:

Wenn $\alpha > 1$ ist und c eine beliebig gegebene positive Zahl, so ist $\alpha^n > c$, wenn n einen hinlänglich großen Wert m überschritten hat. Dies ist eine Erweiterung des Satzes § 10, 5.

Durch den Übergang zu dem reziproken Wert folgt daraus, daß man, wenn $\alpha < 1$ ist, m so groß nehmen kann, daß α^n unter einen beliebig gegebenen positiven Wert c heruntersinkt, wenn $n > m$ ist.

Kehren wir zu dem Fall $\alpha > 1$ zurück, so ist nach (8) um so mehr $\alpha^{p+n} > n\alpha(\alpha-1)$ und es ergibt sich $\alpha^n > n\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p}$ oder, wenn man zur Abkürzung $\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p} = \Delta$ setzt:

$$\alpha^n > \Delta n, \tag{9}$$

worin jetzt Δ eine von α abhängige, aber von n unabhängige positive Zahl ist.

Ist $k+1$ eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, so kann man, wie groß auch die ganze Zahl m sei, immer zwei aufeinander folgende Vielfache von $k+1$ angeben, zwischen denen m liegt, also:

$$(k+1)n \lesseqgtr m < (k+1)(n+1), \tag{10}$$

und wenn man also beide Seiten der Ungleichung (9) zur Potenz $k+1$ erhebt, so ergibt sich, da $\alpha^m \geqq \alpha^{(k+1)n}$ ist:

$$\alpha^m > \Delta^{k+1} n^{k+1}. \tag{11}$$

Es ist ferner nach (10), wenn $m > 2(k+1)$ genommen wird:

$$n > \frac{m-k-1}{k+1} = \frac{m}{k+1}\left(1 - \frac{k+1}{m}\right) > \frac{m}{2(k+1)},$$

und folglich nach (11)

$$\alpha^m > m^k \frac{\Delta^{k+1} m}{(2(k+1))^{k+1}}. \tag{12}$$

Ist nun c eine beliebig gegebene Größe, so kann man m so groß annehmen, daß

$$\frac{\Delta^{k+1} m}{(2(k+1))^{k+1}} > c$$

und folglich

$$\alpha^m > c m^k. \tag{13}$$

Hiermit ist bewiesen:

Ist $\alpha > 1$, k eine beliebig gegebene natürliche Zahl, c eine beliebig große positive Zahl, so ist $\alpha^m > cm^k$, wenn m einen hinlänglich großen Zahlenwert überschritten hat.

Man drückt dies auch so aus, daß α^m mit dem Exponenten m stärker wächst, als jede noch so hohe Potenz von m.

§ 19. Rechnen mit Dezimalbrüchen.

1. Unser indisches Ziffernsystem gestattet es, eine gegebene natürliche Zahl mit einer beliebigen Anzahl von Ziffern zu schreiben, wenn man von Anfang links die nötige Anzahl von Nullen schreibt. So ist 03 soviel wie 3 und 000650 soviel wie 650. Diese Nullen am Anfang links sind aber überflüssig und werden also nicht gesetzt.

Wir betrachten jetzt aber Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, also wenn A eine natürliche Zahl ist, Brüche von der Form

$$\alpha = A\,10^{-n}, \tag{1}$$

und solche Brüche lassen sich auf Grund der soeben gemachten Bemerkung durch den bloßen Stellenwert der Ziffern von A in eindeutiger Weise darstellen.

Wir schreiben nämlich die Zahl A mit mehr als n Stellen, etwa mit $n + m + 1$ Stellen, worin m nicht negativ ist. Wir bezeichnen die höchste dieser Ziffern mit a_m und bezeichnen die folgenden durch Indices in absteigender Reihenfolge, wobei dann aber auch negative Indices vorkommen können:

$$A = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n},$$

worin die a Ziffern aus der Reihe $0, 1, \ldots 9$ bedeuten. Unter Umständen sind aber hier vom Anfang an Nullen zu nehmen. Nun setzen wir

$$\alpha = A\,10^{-n} = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0, \quad a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}, \tag{2}$$

und dieser Ausdruck soll die Bedeutung haben

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots + a_{-n} 10^{-n}.$$

Es wird also durch das Komma angedeutet, wo die negativen Potenzen von 10 beginnen[1]).

Ist $A < 10^m$, also α ein echter Bruch, so sind alle Ziffern vor dem Komma $= 0$ zu setzen. Man schreibt in diesem Fall nur eine Null vor dem Komma, was vollständig ausreicht. Auch diese eine Null könnte weggelassen werden, wenn es nicht ungewohnt und bisweilen auch undeutlich wäre, beim Schreiben einer Zahl mit dem Komma anzufangen. Die Nullen, die etwa unmittelbar nach dem Komma kommen, sind aber wesentlich, ebenso wie die Nullen am Ende einer ganzen Zahl. Dagegen können der letzten Ziffer nach

1) Der erste, der sich dieser Darstellungsweise der Dezimalbrüche bediente, ist vermutlich (nach einigen noch unvollkommenen Vorläufern) Joost Bürgi (1552—1632 oder 1633) gewesen. (Cantor, Gesch. der Mathematik, Bd. II. S. 617.)

dem Komma nach Belieben Nullen angehängt werden. Nullen, die nach der letzten von Null verschiedenen Ziffer folgen, werden gewöhnlich nicht geschrieben.

Wenn wir uns zur Bezeichnung einer dekadisch geschriebenen Zahl der allgemeinen Symbole a bedienen, also

$$a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_n$$

schreiben, worin m, n positive, negative oder verschwindende ganze Zahlen bedeuten und $m > n$ ist, während die $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots$ Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) darstellen, so brauchen wir das Komma gar nicht zu setzen, da der Stellenwert der Ziffer durch den Index hinlänglich gekennzeichnet ist.

Ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, heißt, wenn er in der Form (2) geschrieben ist, ein Dezimalbruch. Zum Unterschied wird ein Bruch, der in der gewöhnlichen Art geschrieben ist, ein gemeiner Bruch genannt.

2. Beim Rechnen mit den Dezimalbrüchen kann man sich derselben Methode bedienen, wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen.

Beim Addieren und beim Subtrahieren muß man die Zahlen so schreiben, daß Ziffern von gleichem Stellenwerte untereinander stehen, daß also die Kommata in allen Zahlen untereinander stehen. Hängt man dann am Ende Nullen an, bis alle Zahlen die gleiche Stellenzahl nach dem Komma haben, so kann man ganz so rechnen, als ob kein Komma vorhanden wäre, hat aber im Resultat das Komma wieder an die gleiche Stelle zu setzen, die es in den einzelnen Zahlen inne hat.

3. Ist ein Dezimalbruch mit 10 zu multiplizieren, so rückt man das Komma um eine Stelle nach rechts, und wenn mit 10^h zu multiplizieren ist, um h Stellen nach rechts. Hat man durch 10 oder durch 10^h zu dividieren, so rückt das Komma um eine oder um h Stellen nach links. Diese Operation ist immer ausführbar, wenn man am Anfang oder am Ende die nötige Anzahl von Nullen anhängt.

4. Wenn man zwei Dezimalbrüche α und β zu multiplizieren hat, von denen der erste μ, der zweite ν Stellen nach dem Komma hat, so läßt man zunächst die beiden Kommata weg, d. h. man multipliziert die ganzen Zahlen $10^\mu\alpha$ und $10^\nu\beta$. Das Produkt ist $10^{\mu+\nu}\alpha\beta$, und man muß also, um $\alpha\beta$ zu erhalten, noch mit $10^{\mu+\nu}$ dividieren, d. h. man muß $\mu + \nu$ Stellen des gefundenen Resultates hinter das Komma setzen. Hiernach ist die Multiplikation von Dezimalbrüchen auf die Multiplikation ganzer Zahlen zurückgeführt.

§ 20. Gekürzte Dezimalzahlen.

1. Der Stellenwert einer Ziffer eines Dezimalbruches wird um so kleiner, je weiter die Ziffer nach rechts steht. Es kommt nun oft vor, daß man bei Zahlenangaben oder Rechnungen die am weitesten rechts stehenden Ziffern von einer gewissen Stelle an nicht mehr berücksichtigt („vernachlässigt"), sei es weil sie nicht bekannt sind, sei es, weil bei der Natur der besonderen Aufgabe nichts darauf ankommt. Das Weglassen dieser Ziffern heißt Kürzen des Dezimalbruches.

Die Berechtigung zu dem Verfahren beruht auf folgendem Satze: Eine dekadisch geschriebene Zahl

$$\varrho = a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_k \tag{1}$$

(worin sowohl n als k auch negativ sein können, aber $n > k$ ist (§ 19, 1.)) ist immer kleiner als 10^n.

Denn man erhält aus ϱ eine größere (jedenfalls nicht kleinere) Zahl, wenn man sämtliche Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_k$ durch Neuner ersetzt. Es ist also

$$\varrho \leqq 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{k+1} + \cdots + 9 \cdot 10^{n-1},$$

und wenn man hierzu 10^k addiert, also die letzte Ziffer um eine Einheit vergrößert, so hat man

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^k \;\; + 10^k \;\; &= 10^{k+1}, \\ 9 \cdot 10^{k+1} + 10^{k+1} &= 10^{k+2}, \\ \cdots\cdots\; &\cdots\cdots \\ 9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1} &= 10^n \end{aligned}$$

und daraus durch Addition, wobei rechts und links $10^{k+1}, 10^{k+2}, \ldots 10^{n-1}$ weggehoben werden können:

$$\varrho + 10^k \leqq 10^n,$$

und folglich, wie bewiesen werden sollte,

$$\varrho < 10^n. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich:

Der Wert einer dekadisch geschriebenen Zahl

$$\alpha = a_m a_{m-1} \cdots a_n a_{n-1} \cdots a_k$$

ist größer als

$$A = a_m a_{m-1} \cdots a_n$$

und kleiner als

$$A' = a_m a_{m-1} \cdots (a_n + 1) = A + 10^n.$$

Hierin ist natürlich, wenn $a_n = 9$ ist, $a_{n+1}(a_n + 1)$ durch $(a_{n+1} + 1)0$ zu ersetzen.

Der Fehler, den man beim Abbrechen nach der Stelle a_n begeht, ist also kleiner als 10^n.

Im allgemeinen wird man immer suchen, die Kürzung des Dezimalbruches so vorzunehmen, daß der Fehler absolut genommen möglichst klein wird. Man kann nun, bei gleicher Stellenzahl, α entweder durch A oder durch A' ersetzen. Es ist dann

$$\alpha = A + \varrho = A' - (10^n - \varrho),$$

der Fehler also (vom Vorzeichen abgesehen) das einemal ϱ, das anderemal $\varrho' = 10^n - \varrho$. Der letzte Fehler wird kleiner sein als der erste, wenn $\varrho > 10^n - \varrho$ oder $2\varrho > 10^n$ ist. Dies findet statt, wenn die erste Ziffer a_{n-1} von ϱ gleich 5, 6, 7, 8, 9 ist, während $\varrho < 10^n - \varrho$ ist, wenn $a_{n-1} = 0, 1, 2, 3, 4$ ist. Die einzige Ausnahme ist, wenn $a_{n-1} = 5$ ist und alle folgenden Ziffern 0 sind. Dann ist $\varrho = \varrho'$ und beide Zahlen A, A' sind gleich gut.

Es ergibt sich hieraus für das Kürzen eines Dezimalbruches die Regel, daß man die letzte beibehaltene Ziffer um 1 erhöht, wenn die erste weggelassene Ziffer größer als 4 ist.

2. Wenn man mit gekürzten Dezimalbrüchen zu rechnen hat, so können die weggelassenen Stellen auf die, die beibehalten werden sollen, noch Einfluß haben. Hat man k solche Zahlen zu addieren oder zu subtrahieren, so kann, wenn die Kürzung nach der in 1. gegebenen Regel vorgenommen ist, die niedrigste beibehaltene Stelle höchstens um $k/2$ zu groß oder zu klein sein. Diese äußerste Grenze des Fehlers wird aber nur dann erreicht, wenn die Einzelfehler alle den möglichst großen Wert und alle den gleichen Sinn haben. Ist nichts weiter bekannt, als die abgekürzten Zahlen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von einer gewissen Größe nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beurteilen. Die größeren Fehler sind darnach weniger wahrscheinlich als die kleineren.

Ist noch irgend etwas weiteres bekannt, z. B. ob in den einzelnen Zahlen ein positiver oder ein negativer Fehler vorhanden ist, so werden die Grenzen der möglichen Fehler des Resultates noch weiter eingeengt.

3. Hat man gekürzte Zahlen miteinander zu multiplizieren, so würde das gewöhnliche Verfahren in den niederen Stellen wertlose Resultate liefern und eine zum Teil vergebliche Arbeit sein. Man bedient sich daher in diesen Fällen der sogenannten abgekürzten Multiplikation.

Was darüber im allgemeinen zu sagen ist, läßt sich wohl am besten an einem Beispiel übersehen.

Es seien zwei vierstellige Zahlen

$$\alpha = a_3\, a_2\, a_1\, a_0\,,$$
$$\beta = b_3\, b_2\, b_1\, b_0$$

miteinander zu multiplizieren.

Beginnt man bei der Multiplikation mit der höchsten Stelle von β, so stellt sich die Rechnung bei dem genauen Verfahren der Multiplikation so:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\hline
a_3 b_3 & a_2 b_3 & a_1 b_3 & a_0 b_3 & * & * & * \\
 & a_3 b_2 & a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 & * & * \\
 & & a_3 b_1 & a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 & * \\
 & & & a_3 b_0 & a_2 b_0 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\
\hline
c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0\,,
\end{array}$$

wobei natürlich bei den Produkten $a_h b_k$ und bei den Summen c_k, die die Zahl 9 übersteigen, die Zehner auf die nächst höhere Stelle zu werfen sind.

An den Stellen, wo in unserem Schema die Sternchen stehen, sollten aber nicht Nullen sondern unbekannte Ziffern stehen, so daß also auch die Ziffern c_2, c_1, c_0 mit Fehlern behaftet sein können, und zwar wird die Unsicherheit größer von c_2 nach c_0. Die Unsicherheit in c_2 kann, im ungünstigsten Fall, wenn alle Summanden von c_2 so groß als möglich sind, bis auf drei Einheiten in der Stelle c_4 zurückwirken. Man wird also der Stelle c_2 selbst keinen Wert mehr beilegen, wird aber doch den Wert der einzelnen Summanden abschätzen und zur Korrektur von c_3 und c_4 benutzen. Ebenso wird man jede Kenntnis, die man über den Wert der Sternchen hat, zur Verbesserung der beibehaltenen Stellen benutzen. Die geschickte Benutzung aller dieser Vorteile wird der praktische Rechner sich erst in der Anwendung durch Übung erwerben können[1]).

---

1) **Lüroth**, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig, Teubner 1900.

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

§ 21. Quadratwurzeln.

1. In der Reihe der natürlichen Zahlen sind gewisse Zahlen enthalten, die die zweiten Potenzen (Quadrate) von anderen natürlichen Zahlen sind, z. B.

$$(1) \qquad 1 = 1^2,\quad 4 = 2^2,\quad 9 = 3^2,\quad 16 = 4^2,\quad 25 = 5^2,$$
$$36 = 6^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 8^2,\ 81 = 9^2,\ 100 = 10^2;$$

diese Zahlen 1, 4, 9, 16, ... nennt man Quadratzahlen und die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., deren zweite Potenzen sie sind, ihre Wurzeln (genauer Quadratwurzeln). Man schreibt, um dies Verhältnis anzudeuten,

$$1 = \sqrt{1},\quad 2 = \sqrt{4},\quad 3 = \sqrt{9},\quad 4 = \sqrt{16} \text{ u. s. f.}$$

Die n^{te} Quadratzahl ist n^2, und der Unterschied zwischen der n^{ten} und der $n - 1^{\text{ten}}$, also $n^2 - (n-1)^2$ ist gleich $2n - 1$, also gleich der n^{ten} ungeraden Zahl.

2. Aufgabe. Es ist eine dekadisch geschriebene ganze Zahl a gegeben; es soll entschieden werden, ob a eine Quadratzahl ist oder nicht und im ersten Fall ihre Wurzel, im zweiten die größte in a enthaltene Quadratzahl und deren Wurzel bestimmt werden.

Die Rechnung, die zur Lösung dieser Aufgabe führt, wird das Wurzelziehen oder Radizieren genannt und durch das vor die Zahl a gesetzte Zeichen $\sqrt{\ }$ angedeutet. Wenn a im ersten Hundert liegt, so kann die Aufgabe durch die Zusammenstellung (1) als unmittelbar gelöst betrachtet werden.

Wir nehmen an, sie sei gelöst für eine gewisse Zahl a, d. h. es sei eine Zahl α gefunden, die der Bedingung

$$(2) \qquad \alpha^2 \overline{\gtrless} a < (\alpha + 1)^2$$

genügt. Wir wollen daraus die Lösung für eine Zahl

$$(3) \qquad a_1 = 100a + 10b + c$$

ableiten, in der b, c Ziffern bedeuten. Es entsteht dann a_1 aus a durch Anhängen von zwei Ziffern bc, und a_1 wird also mit zwei Ziffern mehr geschrieben als a. Wir setzen

$$\alpha_1 = 10\alpha + \beta \tag{4}$$

und haben also β so zu bestimmen, daß

$$(10\alpha + \beta)^2 \leqq a_1 < (10\alpha + \beta + 1)^2. \tag{5}$$

Hierin muß nun β ebenfalls eine Ziffer sein; denn wäre $\beta \geqq 10$, so würde aus (5) folgen

$$100(\alpha + 1)^2 \leqq (10\alpha + \beta)^2 \leqq 100a + 10b + c,$$

also

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a + b10^{-1} + c10^{-2},$$

oder, da $b10^{-1} + c10^{-2}$ kleiner als 1 und $(\alpha + 1)^2$ eine ganze Zahl ist:

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a,$$

was der Voraussetzung (2) widerspricht, nach der $(\alpha + 1)^2$ größer als a ist.

Demnach verlangt (5), daß die größtmögliche Zahl β bestimmt werde, die der Bedingung genügt, daß

$$\beta(20\alpha + \beta) \leqq 100(a - \alpha^2) + 10b + c \tag{6}$$

ist, und da β nur 10 verschiedene Werte haben kann, nämlich 0, 1, 2, ... 9, so wird diese Bestimmung bald gelingen. Um einen Anhalt dafür zu gewinnen, dividiert man die Zahl $10(a - \alpha^2) + b$ durch 2α und erhält in dem Quotienten einen vorläufigen Wert von β, der aber unter Umständen noch um eine oder mehrere Einheiten verkleinert werden muß; bei einiger Übung ist die Rechnung leicht und schnell zu führen. Hierauf beruht der bekannte Algorithmus des Wurzelziehens, von dem wir hier nur ein Beispiel anführen wollen.

$\sqrt{8.40.00.00} = 2898$
4
440 : 4 | 8
384
5600 : 56 | 9
5121
47900 : 578 | 8
46304
1596

Zu der zweiten Ziffer 8 führt die Division 44 : 4, die eigentlich 11 ergeben würde, was aber auf 8 herabgemindert werden muß.

2. Man kann durch dasselbe Verfahren einen Dezimalbruch bestimmen, dessen Quadrat sich so wenig als man will von der gegebenen Zahl a unterscheidet.

Zu diesem Zwecke sucht man die größte ganze Quadratzahl α^2, die in $10^{2n}a$ enthalten ist. Dann ist

$$\alpha^2 \overline{\gtrless} 10^{2n}a < (\alpha + 1)^2, \tag{7}$$

und wenn man dann

$$\alpha_n = \alpha 10^{-n} \tag{8}$$

setzt, so ist

$$\alpha_n{}^2 \overline{\gtrless} a < (\alpha_n + 10^{-n})^2. \tag{9}$$

Man erhält die Zahl $10^{2n}a$ aus a, indem man $2n$ Nullen anhängt, und dann α_n aus α, indem man die letzten n Ziffern von α hinter ein Komma setzt. Wenn man dann die letzte Ziffer von α_n um eine Einheit erhöht, so erhält man bereits einen zu großen Wert.

Diese Zahlen a_n heißen die genäherten Werte der Quadratwurzel aus a. So ist in obigem Beispiel 28,98 ein genäherter Wert der Quadratwurzel aus 840.

Ebenso kann man aber auch verfahren, um die genäherten Werte der Quadratwurzeln aus Dezimalbrüchen zu erhalten. Man hat nur die Stellen vom Komma aus nach beiden Seiten paarweise abzuschneiden, nötigenfalls nach Anhängen einer Null am Ende.

§ 22. Irrationalzahlen.

1. Ob eine natürliche Zahl Quadratzahl sei oder nicht, läßt sich leicht entscheiden, wenn die Zerlegung dieser Zahl in ihre Primfaktoren bekannt ist. Sind nämlich $a, b, c, \ldots$ voneinander verschiedene Primzahlen, sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive Exponenten und ist

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots,$$

so ist m dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sämtlich gerade Zahlen sind.

Es folgt dies aus dem Satze, daß sich eine natürliche Zahl nur auf eine Art in Primfaktoren zerlegen läßt.

Ist diese Bedingung erfüllt, und also $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$, $\gamma = 2\gamma', \cdots$ so erhält man die Wurzel aus m in der Form

$$\sqrt{m} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \cdots.$$

Ist aber m keine Quadratzahl, so gibt es auch keinen Bruch p/q, dessen Quadrat gleich m wäre.

Denn wenn irgend einer der Primzahlpotenzfaktoren von m,

etwa a^α einen ungeraden Exponenten hat, so kann mq^2 nicht gleich p^2 sein, weil sonst a auch mit einem ungeraden Exponenten in p^2 enthalten sein müßte.

Ebenso kann ein reduzierter Bruch m/n nur dann das Quadrat eines anderen Bruches p/q sein, wenn m nnd n beide Quadratzahlen sind. Denn wenn $mq^2 = np^2$ wäre, und n und m keine gemeinsamen Teiler haben, so müßte, wenn wieder a^α mit ungeradem α die höchste Potenz der Primzahl a ist, die in m aufgeht, da a nicht in n aufgeht, a auch mit einer ungeraden Potenz in p^2 enthalten sein[1]).

2. Hier stößt die Aufgabe, die Operation des Potenzierens umzukehren (schon des Potenzierens mit 2), auf eine Schranke. Die Aufgabe ist ebensowenig lösbar, wie die Aufgabe der Teilung ganzer Zahlen vor der Einführung der Brüche.

Will man diese Lösung trotzdem erzwingen, so bleibt nichts übrig, als eine abermalige Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Einführung neuer Zahlen, die man jetzt allgemein Irrationalzahlen nennt, denen gegenüber die bisher betrachteten Zahlen, die als spezieller Fall in den allgemeinen Zahlen enthalten sein müssen, von jetzt ab rationale Zahlen heißen.

Diese neuen Zahlen sind, wie die Zahlen überhaupt, willkürliche Schöpfungen unseres Geistes, und es ist lediglich eine Zweckmäßigkeitsfrage, ob wir diesen erweiterten Begriff benutzen und Namen dafür gebrauchen wollen oder nicht.

Für den praktischen Rechner, der seine Operationen doch nur an rationalen Zahlen ausführen kann, ist diese Frage allerdings ziemlich gleichgültig. Aber die innere Harmonie des Gebäudes der Arithmetik fordert eine solche Erweiterung des Zahlenbegriffs, ohne die überdies die Ausdrucksweise und die Formulierung vieler Sätze, besonders in der höheren Analysis, äußerst schwerfällig und weitläufig werden würde.

---

1) Man nimmt an, daß Pythagoras zuerst deutlich erkannt habe, daß die Quadratwurzel aus nicht quadratischen Zahlen, z. B. aus der Zahl 2, die das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zur Seite dieses Quadrates darstellt, in Zahlen nicht angebbar ist (*ἄλογον*). Einen Beweis dafür, den schon Aristoteles andeutet, gibt Euklid (Elemente X. 117, Heiberg, Bd. III, S. 409). Dieser Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der im Text gegebene: Es kann nicht zwei ganze Zahlen x, y ohne gemeinschaftlichen Teiler geben, die der Bedingung $2x^2 = y^2$ genügen; denn sonst müßte y gerade, also y^2 durch 4 teilbar sein. Dann müßte aber x^2 durch 2 teilbar, also x gerade sein, was doch nicht möglich ist, da x und y keinen gemeinschaftlichen Teiler haben sollen.

Einen anderen Beweis, bei dem die Sätze über Zerlegbarkeit einer Zahl in Primfaktoren nicht vorausgesetzt wird, gibt Dedekind in der Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen".

Wir haben die Freiheit, jedem wohldefinierten Gattungsbegriff einen Namen zu geben. Es muß aber unbedingt gefordert werden, daß die Bedeutung eines solchen Namens so genau festgesetzt sei, daß es immer in sich vollständig entschieden ist, was unter diesen Begriff gehört und was nicht. Nur mit solchen scharf definierten Begriffen kann die Mathematik operieren.

Im übrigen ist der Begriff der Irrationalzahl, wie jeder Zahlbegriff, ein Gattungsbegriff. Man kann auf unendlich viele Arten Begriffssysteme bilden, deren Individuen sich in eindeutiger Weise aufeinander abbilden lassen, deren jedes daher dem Zweck, den die Einführung der Irrationalzahlen hat, gleich gut entspricht. Man kann etwa von den unendlichen Dezimalbrüchen ausgehen, oder von unendlichen Kettenbrüchen; dasselbe leisten G. Cantors „Zahlenreihen" oder Christoffels „Charakteristiken". Die Wahl des Weges wird nur durch die Einfachheit oder leichtere Verständlichkeit bestimmt, und in dieser Beziehung scheint der von Dedekind geschaffene Begriff des „Schnittes" als Ausgangspunkt den Vorzug zu verdienen.

Die Gesamtheit der in den Systemen enthaltenen Elemente, die bei der eindeutigen Abbildung untereinander verbunden sind, bildet einen Gattungsbegriff, den wir eine irrationale Zahl nennen. Es ist gleichgültig, an welchen Repräsentanten wir die Eigenschaften dieser Gattungen studieren. Solche Repräsentanten nennen wir gelegentlich auch selbst irrationale Zahlen, z. B. einen unendlichen Dezimalbruch.

3. Das Nächstliegende und Einfachste würde es wohl sein, wenn man sich auf die Raumanschauung berufen und Zahlen geradezu als Strecken erklären wollte. Man müßte dann ein Axiom etwa folgenden Inhaltes voraussetzen:

Wenn die Gesamtheit der Punkte einer Geraden, die etwa horizontal vor Augen liegt, derart in zwei Teile A und A' geteilt ist, daß jeder Punkt aus A links liegt von jedem Punkt aus A', so kann man die Linie selbst durch einen bestimmten Punkt α derart in zwei Teile zerschneiden, daß der eine Teil alle Punkte aus A, der andere alle Punkte aus A' enthält.

Die Existenz dieses Punktes α ist aber ein Axiom, das aus der Natur unserer Raumanschauung stammt, das sich aus reinen Begriffen in keiner Weise beweisen läßt. Es läßt sich streng genommen nicht einmal beweisen, daß Punkte, die geometrisch konstruierbar sind, z. B. die Mitte einer Strecke, wirklich existieren.

Die Annahme dieses Axioms genügt also einer rein arithmetischen Auffassung des Zahlbegriffes nicht, so sehr sie sich durch

die Anschaulichkeit empfiehlt. Wir werden uns ihrer daher auch im folgenden zwar nicht zur Beweisführung, wohl aber zur Erleichterung des Verständnisses und zur Fixierung der Gedanken, gleichsam wie einer Zeichensprache, bedienen.

4. Die Einteilung der Gesamtheit der rationalen Zahlen (positiven und negativen) in zwei Teile A, A' von der Art, daß jede Zahl von A kleiner ist als jede Zahl von A', heißt ein Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen.

Einen solchen Schnitt bezeichnen wir durch A/A' oder kürzer durch einen griechischen Buchstaben, α, die rationalen Zahlen aus A sollen mit a, die aus A' mit a' bezeichnet sein. In derselben Weise brauchen wir die andern Buchstaben der drei Alphabete.

Die beistehende Figur, die die Zahlenlinie darstellt, mag dies veranschaulichen.

Fig. 2.

Eine rationale Zahl r erzeugt einen oder genauer gesagt zwei Schnitte R/R'.

Wenn wir nämlich alle Zahlen, die kleiner als r sind zu R, alle Zahlen, die größer als r sind zu R', und r selbst entweder zu R oder zu R' zählen, dann ist r selbst die größte Zahl von R oder die kleinste von R'. Schnitte, die auf diese Weise entstehen, nennen wir rationale Schnitte.

Daß es aber auch Schnitte gibt, die nicht so durch rationale Zahlen erzeugt werden können, und die wir dann irrationale Schnitte nennen, zeigt das folgende Beispiel:

Man nehme in A alle Zahlen a auf, deren Quadrat kleiner als 2, in A' alle Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist. Dann sind alle rationalen Zahlen untergebracht, da es keine Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, und jede Zahl a ist kleiner als jede Zahl a'. Es gibt aber keine größte Zahl in A und keine kleinste in A'; denn ist $a^2 < 2$, so können wir eine natürliche Zahl n so annehmen, daß

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$$

wird, und dann ist zwar $a + 1/n > a$, aber doch noch $(a + 1/n)^2 < 2$; und ebenso läßt sich zeigen, daß es keine kleinste Zahl a' gibt.

5. Es ist also A/A' ein rationaler Schnitt, wenn es entweder ein größtes a oder ein kleinstes a' gibt, und ein irrationaler Schnitt, wenn es weder ein größtes a noch ein kleinstes a' gibt.

Ist also A/A' irrational, so kann man zu jedem a noch größere a und zu jedem a' noch kleinere a' finden.

Es gibt in jedem Schnitt A/A' beliebig viele Zahlenpaare a, a', deren Unterschied $a' - a$ kleiner ist als eine beliebig gegebene Zahl d.

Um dies zu beweisen, nehmen wir eine natürliche Zahl n so an, daß $1/n < d$ ist. Es gibt dann immer zwei ganze positive oder negative Zahlen k und k' von der Art, daß k/n kleiner ist als irgend eine Zahl a, und k'/n größer als eine Zahl a', und k/n ist dann selbst eine Zahl in A, k'/n eine Zahl in A'. In der Reihe der Zahlen

$$\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}, \ldots \frac{k'}{n}$$

wird dann eine letzte in A enthalten sein, die wir mit m/n bezeichnen, und es ist dann

$$\frac{m}{n} = a, \quad \frac{m+1}{n} = a'$$

und

$$a' - a = 1/n < d.$$

Bei einem irrationalen Schnitt gibt es dann zwischen diesen beiden Zahlen a, a' noch beliebig viele andere sowohl in A als in A', bei rationalem Schnitt wenigstens in einem der beiden Teile.

Den beiden durch eine rationale Zahl r erzeugten rationalen Schnitten ordnen wir nun eben diese Zahl r zu, betrachten also diese beiden Schnitte als von gleichem Zahlenwert.

Einem irrationalen Schnitt ordnen wir ein Individuum der neuen Zahlenart, eine Irrationalzahl zu, die wir mit α bezeichnen. Es soll für die nächsten Betrachtungen daran festgehalten werden, daß die kleinen lateinischen Buchstaben rationale, die griechischen Buchstaben irrationale Zahlen bedeuten.

6. Es kommt jetzt darauf an, die Irrationalzahlen in eine Größenordnung zu bringen, in der auch die rationalen Zahlen, und zwar ihrer Größe nach, eine Stelle finden.

Wir betrachten zwei verschiedene Schnitte A/A' und B/B'. Wenn es nur eine Zahl a' gibt, die zugleich ein b ist, so ist dies die kleinste aller a' und zugleich die größte aller b; die Schnitte sind rational und haben denselben Zahlenwert ($\alpha = \beta$). Wir definieren also folgendermaßen:

Die Zahl α heißt kleiner als β,

$$\alpha < \beta,$$

wenn es wenigstens zwei Zahlen a' gibt, die zugleich Zahlen b sind.

Es gibt dann auch unendlich viele solche Zahlen $a' = b$. Die Figur 3 veranschaulicht dies Verhältnis, und ein Blick auf sie beweist zugleich den Satz:

Ist $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, so ist auch $\alpha < \gamma$.

Legt man den rationalen Schnitten die sie erzeugenden rationalen Zahlen als Werte bei, so stimmt diese Größenbestimmung mit der gewöhnlichen überein, da von zwei rationalen Zahlen die erste kleiner ist als die zweite, wenn eine dritte rationale Zahl existiert, die größer ist als die erste und kleiner als die zweite.

Ist A/A' ein Schnitt, so ist jede Zahl $-a'$ kleiner als jede Zahl $-a$. Bezeichnen wir also die Inbegriffe der Zahlen $-a$, $-a'$ mit $-A$ und $-A'$, so ist auch $-A'/-A$ ein Schnitt. Die durch ihn erzeugte Zahl wird mit $-\alpha$ bezeichnet und heißt die zu α entgegengesetzte irrationale Zahl.

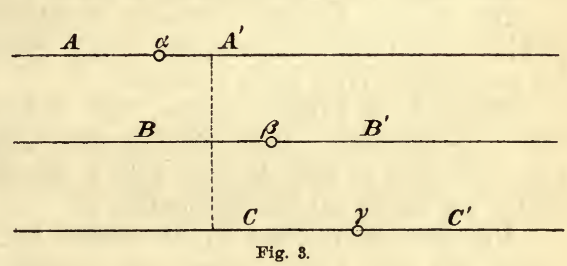


Fig. 3.

7. Man könnte vermuten, daß man durch weitere Anwendung des Prinzips der Schnitte noch zu neuen Zahlenarten gelangen würde. Daß dies nicht der Fall ist, ergibt sich durch folgende Betrachtung: Es sei A/A' ein Schnitt im Gebiete der irrationalen Zahlen, in der Weise, daß jede Zahl α aus A kleiner ist als jede Zahl α' aus A'. Ein solcher Schnitt wird aber immer durch eine bestimmte irrationale Zahl σ erzeugt, in der Weise, daß σ entweder die größte Zahl in A oder die kleinste in α' ist. Wenn nämlich eine rationale Zahl r als Spezialfall der irrationalen Zahlen betrachtet wird, so ist r entweder in A oder in A' enthalten. Bezeichnet man die ersten mit a, die zweiten mit a', so ist ein Schnitt A/A' und dadurch eine irrationale Zahl σ erklärt. Ist α in A enthalten, aber nicht die größte Zahl in A, so gibt es in A auch rationale Zahlen a, die größer sind als α und mithin ist auch σ größer als α, und ebenso sieht man, daß, wenn α' in A' aber nicht die kleinste Zahl in A' ist, $\sigma < \alpha'$ ist. Es bleibt also für σ nur noch die Möglichkeit übrig, daß es die größte Zahl in A oder die kleinste Zahl in A' ist.

§ 23. Obere und untere Grenze.

1. Ist T irgend eine Zahlenmenge, deren Elemente rationale oder irrationale Zahlen sind, die mit $\tau, \tau', \ldots$ bezeichnet sein mögen, von denen vorausgesetzt wird, daß es eine Zahl t gibt, die größer ist als alle Zahlen τ, so existiert eine und nur eine Zahl γ von der doppelten Eigenschaft:

a) Alle Zahlen in T sind kleiner als γ oder höchstens gleich γ.

b) Ist dagegen ε irgend eine Zahl, die kleiner ist als γ, so gibt es wenigstens eine Zahl τ in T, die zwischen γ und ε liegt, d. h. der Formel genügt

(1) $$\varepsilon < \tau \overline{\gtrless} \gamma.$$

Die Zahl γ, deren Existenz jetzt bewiesen werden soll, heißt die obere Grenze der Zahlenmenge T.

Man kann sie kürzer auch so erklären:

Die obere Grenze ist eine Zahl, die von keiner der Zahlen τ an Größe übertroffen wird, der aber doch Zahlen τ bis auf jeden Grad nahe kommen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß es höchstens eine solche Zahl γ geben kann. Denn sind es zwei, etwa γ und γ', und ist $\gamma < \gamma'$, so gibt es nach b) eine Zahl τ, für die $\gamma < \tau \overline{\gtrless} \gamma'$ ist; die Zahl γ hat also nicht die Eigenschaft a).

Um aber die Existenz einer solchen Zahl γ nachzuweisen, bemerken wir, daß, wenn r irgend eine rationale Zahl ist, von zweien nur eines möglich ist: Entweder es gibt eine Zahl τ, die größer ist als r; solche Zahlen r wollen wir mit c bezeichnen. Oder es gibt keine Zahl τ die größer ist als r; diese Zahlen r mögen mit c' bezeichnet sein. Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß es sowohl Zahlen c als Zahlen c' gibt, denn jede rationale Zahl r, die größer ist als t, ist eine Zahl c', und wenn τ irgend eine Zahl in T ist, so ist jedes r, was kleiner ist als τ, ein c. Ferner ist jedes c kleiner als jedes c' und die Zahlen c, c' bilden also einen Schnitt C/C' und definieren eine Zahl γ, von der man nun sofort sieht, daß sie die beiden Eigenschaften a), b) hat.

Denn gibt es eine Zahl τ über γ, so gibt es auch eine rationale Zahl r, für die $\gamma < r < \tau$ ist. Diese Zahl r müßte also einerseits zu den a, andererseits zu den a' gehören, was nicht möglich ist. Und wenn $\varepsilon < \gamma$ ist, so gibt es eine Zahl c zwischen ε und γ, und folglich auch ein τ, das der Bedingung $\varepsilon < c < \tau \overline{\gtrless} \gamma$ genügt.

2. Ebenso läßt sich der folgende Satz beweisen:

Giebt es eine Zahl t' von der Art, daß alle Zahlen der Menge T größer sind als t', so existiert eine und nur eine Zahl γ' von der doppelten Eigenschaft:

a') Alle Zahlen in T sind größer als γ' oder mindestens gleich γ'.

b') Ist ε' irgend eine Zahl, die größer ist als γ', so gibt es wenigstens eine Zahl τ' in T, die zwischen γ' und ε' liegt, d. h. der Ungleichung genügt:

$$\gamma' \leqq \tau' < \varepsilon'.$$

Diese Zahl γ' heißt die untere Grenze der Zahlenmenge T. Ihre Existenz wird auf demselben Wege bewiesen, wie die der oberen Grenze oder auch noch einfacher daraus geschlossen, daß die Zahlenmenge $-T$ (die aus den Zahlen $-\tau, -\tau', \ldots$ besteht), eine obere Grenze hat, und der entgegengesetzte Wert davon ist dann die untere Grenze von T. Es gibt Mengen, die nur eine untere, und solche die nur eine obere Grenze haben. So hat die Menge der positiven Zahlen die Null zur unteren Grenze; eine obere Grenze ist nicht vorhanden. Die Gesamtheit der negativen Zahlen hat die Null zur oberen Grenze, aber keine untere Grenze. Die Gesamtheit der echten Brüche hat die Null zur unteren, die 1 zur oberen Grenze.

Die untere oder obere Grenze einer Menge braucht nicht zu der Menge zu gehören. Wenn sie dazu gehört, so nennt man die untere Grenze das Minimum, die obere das Maximum der Menge.

Ist A/A' ein Schnitt, der die Zahl α erzeugt, so ist α zugleich die obere Grenze aller Zahlen a und die untere Grenze aller Zahlen a'.

§ 24. Rechnen mit Irrationalzahlen.

1. Wir haben nun die fundamentalen Rechenoperationen im Gebiete der Irrationalzahlen zu erklären. Es genügt dabei, auf eine derselben, etwa die Addition, etwas genauer einzugehen, da für die übrigen wesentlich dasselbe gilt. Sind α und β irgend zwei durch die Schnitte A/A' und B/B' definierte Zahlen, so hat die Zahlenmenge $a + b$ eine obere Grenze γ und die Menge $a' + b'$ eine untere Grenze γ'. Diese beiden Grenzen γ und γ' können aber nicht voneinander verschieden sein.

Denn angenommen, es sei $\gamma' < \gamma$, so gibt es in beliebiger Nähe von γ' und größer als γ' eine Zahl $a' + b'$ und in beliebiger Nähe von γ und kleiner als γ eine Zahl $a + b$ und es ist also $a' + b' < a + b$, was unmöglich ist, da $a < a'$, $b < b'$ ist.

Ist aber zweitens $\gamma < \gamma'$, so nehme man zwei rationale c, c' so an, daß $\gamma < c < c' < \gamma'$. Dann sind alle $a' + b'$ größer als c' und alle Zahlen $a + b < c$, also:

$$c' \leqq a' + b' \quad \text{für alle} \quad a', b',$$
$$c \geqq a + b \quad \text{für alle} \quad a, b.$$

Folglich ist für alle Zahlen a, b, a', b'

$$c' - c \leqq (a' - a) + (b' - b),$$

was der Tatsache widerspricht, daß es Zahlen a, a'; b, b' geben muß,

deren positive Differenzen $a' - a$ und $b' - b$ dem absoluten Werte nach unter jede Grenze heruntersinken. Die beiden Zahlen γ und γ' sind also nicht von einander verschieden, und wir definieren:

Unter der Summe $\alpha + \beta$ zweier Zahlen α und β verstehen wir die obere Grenze aller Summen $a + b$ und die diesen gleiche untere Grenze der Summe $a' + b'$.

2. Für die Erklärung der Differenz bemerken wir, daß die Zahlen $a - b'$ eine obere und die $a' - b$ eine untere Grenze haben, und genau wie vorhin ergibt sich, daß diese Grenzen nicht verschieden sind. Also:

Unter der Differenz $\alpha - \beta$ der Zahlen α und β verstehen wir die obere und und untere Grenze der Zahlen $a - b'$ und $a' - b$.

3. Die Multiplikation und Division erklären wir zunächst für positive Zahlen α, β. Beschränken wir uns dann auch auf positive Zahlen a, b, so ergibt sich ebenso, daß ab und a/b' eine obere, $a'b'$ und a'/b eine untere Grenze haben, und daß die obere Grenze von ab gleich der unteren Grenze von $a'b'$, die obere Grenze von a/b' gleich der unteren für a'/b ist.

Unter dem Produkt $\alpha\beta$ der positiven Zahlen α und β verstehen wir die gemeinsame (obere und untere) Grenze der Zahlen ab und $a'b'$, unter dem Quotienten α/β die gemeinsame (obere und untere) Grenze der Zahlen a/b' und a'/b.

Um die Multiplikation und Division auch auf negative Zahlen auszudehnen, lassen wir dieselben Definitionen gelten, wie bei den rationalen Zahlen (§ 13), wonach

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta, \quad -\alpha(-\beta) = \alpha\beta,$$
$$-\alpha/\beta = \alpha/-\beta = -\alpha/\beta, \quad -\alpha/-\beta = \alpha/\beta.$$

Ist einer der Faktoren des Produktes $\alpha\beta$ oder der Zähler des Quotienten α/β gleich Null, so geben wir dem Produkt oder dem Quotienten selbst den Wert Null. Den Nenner β des Quotienten α/β dürfen wir nicht gleich Null nehmen.

4. Bei dieser Definition der vier Grundoperationen besteht nun der folgende wichtige Satz, den wir den Satz von der Stetigkeit nennen wollen, durch den diese Definitionen erst praktischen Wert erlangen:

Es seien α, β zwei beliebige Zahlen, immer mit der Beschränkung, daß bei der Division α/β der Wert $\beta = 0$ ausgeschlossen ist, und es bedeute $f(\alpha, \beta) = \varrho$ das Resultat einer der vier mit diesen Zahlen vorzunehmenden Grundoperationen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, α/β, ferner $f(a, b) = r$ das Resultat der mit den rationalen Zahlen a, b aus-

geführten nämlichen Rechenoperationen. Es seien dann zwei rationale (oder auch irrationale) Zahlen h, h' von der Art, daß

$$(1) \qquad h < \varrho < h'$$

ist, beliebig gegeben. Dann lassen sich die Zahlen a_1, a_1', b_1, b_1' so bestimmen, daß

$$(2) \qquad a_1 < \alpha < a_1', \quad b_1 < \beta < b_1',$$

und daß für jedes rationale Zahlenpaar a, b, das der Bedingung genügt

$$(3) \qquad a_1 < a < a_1', \quad b_1 < b < b_1',$$

die Ungleichung

$$(4) \qquad h < r < h'$$

besteht. Oder in Worten ausgedrückt:

Man kann dem Resultat einer Rechnung $f(\alpha, \beta)$ mit Irrationalzahlen durch die gleiche Rechnung mit rationalen Zahlen $f(a, b)$ **beliebig** nahe kommen, wenn man die Zahlen a, b den Zahlen α, β **genügend** nahe annimmt.

Solche Zahlen a, b heißen Näherungswerte der Zahlen α, β.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Rechenoperationen mit irrationalen Zahlen, und es wird genügen, auf eine derselben etwas genauer einzugehen. Nehmen wir also die Addition $\alpha + \beta$; da ϱ die obere Grenze der $a + b$ und die untere Grenze der $a' + b'$ ist, so kann man, wenn c, c' in dem ϱ erzeugenden Schnitt C/C' beliebig gegeben sind, zwischen c und ϱ ein $a + b$, das wir mit $a_1 + b_1$ bezeichnen, einschieben, und ebenso $a_1' + b_1'$ zwischen ϱ und c'. Es ist also

$$(5) \qquad c < a_1 + b_1 < a_1' + b_1' < c'.$$

Wenn aber nun a und b den Ungleichungen (3) genügen, so ist

$$(6) \qquad a_1 + b_1 < a + b < a_1' + b_1',$$

und damit ist der Beweis geführt.

5. Dieser Satz gestattet nun eine Verallgemeinerung:

Fundamentalsatz der Stetigkeit. Ist ϱ das Ergebnis einer durch beliebige Wiederholung der vier Grundrechnungsarten aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zusammengesetzten Rechnung $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, sind ferner h, h' zwei beliebig gegebene Zahlen, für die

$$(7) \qquad h < \varrho < h',$$

so kann man die Zahlen $a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; \ldots$ so bestimmen, daß

$$(8) \qquad a_1 < \alpha < a_1'; \quad b_1 < \beta < b_1'; \quad c_1 < \gamma < c_1', \cdots$$

und daß, wenn die rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots$ den Bedingungen

(9) $$a_1 < a < a_1'; \quad b_1 < b < b_1'; \quad c_1 < c < c_1'; \cdots$$

genügen, auch $r = F(a, b, c, \ldots)$ der Ungleichung

(10) $$h < r < h'$$

genügt.

Wir beweisen diesen Satz leicht aus dem speziellen Fall 4. durch vollständige Induktion.

Wir nehmen den Satz als bewiesen an für ein Zahlensystem

(11) $$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

und die Rechenoperation

(12) $$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \varrho$$

und für ein zweites Zahlensystem

(13) $$\mu, \nu, \ldots$$

und die Rechenoperation

(14) $$\varphi(\mu, \nu, \ldots) = \sigma;$$

wir wollen ihn daraus ableiten für eine mit den beiden Zahlen ϱ, σ ausgeführte Rechenoperation

(15) $$F(\varrho, \sigma) = \tau.$$

Wir nehmen also die zwei Zahlen h, h' beliebig an, so daß

(16) $$h < \tau < h'$$

ist. Nach dem Satze 4. können wir dann für ϱ und σ Werte k, l, k', l' so bestimmen, daß

(17) $$k < \varrho < k', \quad l < \sigma < l',$$

und daß $F(r, s)$ auch zwischen den Grenzen h und h' liegt, wo r und s Näherungswerte von ϱ, σ zwischen den Grenzen (17) bedeuten, also

(18) $$k < r < k'; \quad l < s < l'.$$

Dann aber können wir nach der Voraussetzung, daß der Satz für die Zahlen ϱ, σ bereits bewiesen sei, für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \ldots$ wieder rationale Näherungswerte

$$a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$$

innerhalb hinlänglich enger Grenzen setzen, so daß die dadurch entstehenden Zahlen

$$f(a, b, c, \ldots) = r, \quad f(m, n, \ldots) = s$$

in den Intervallen (18) liegen, und damit ist der Beweis des Satzes allgemein geführt.

6. Wir können dem Fundamentalsatz noch eine etwas schärfere Fassung geben, die für manche Zwecke nötig ist, und die sich ebenso beweisen läßt:

Ist wie vorher $\varrho = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ das Ergebnis irgend einer Rechnung mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und $h < \varrho$, so kann man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ derart durch rationale Näherungswerte $a, b, c, \ldots$ ersetzen, daß $r = f(a, b, c, \ldots)$ und $h < r < \varrho$.

Entsprechendes gilt, wenn $\varrho < h'$ angenommen wird.

7. Diese Sätze geben nicht nur dem praktischen Rechner die Gewißheit, daß er durch seine Rechnungen, die der Natur der Sache nach nur mit Näherungswerten geschehen können, jeden vorgeschriebenen Grad der Genauigkeit erreichen kann; er gibt uns auch das theoretisch wichtige Resultat, daß eine Gleichung oder eine Ungleichung, die für alle rationalen Zahlen als richtig erkannt ist, auch für irrationale Zahlen richtig bleibt.

Jede Gleichung zwischen rationalen Zahlen kann in die Form gebracht werden

$$f(a, b, c, \ldots) = 0, \tag{19}$$

wo f irgend eine wiederholte Anwendung der vier Grundrechnungsarten bedeutet. Ist nun eine solche Gleichung richtig für alle möglichen rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots$, so muß sie auch für irrationale $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ richtig bleiben, d. h. es ist auch

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0. \tag{20}$$

Wäre nämlich $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ nicht Null, sondern z. B. positiv, so nehme man zwei positive Zahlen h, h' so an, daß

$$h < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < h'; \tag{21}$$

dann wäre aber auch für gewisse rationale Näherungswerte $f(a, b, c, \ldots)$ zwischen h und h' enthalten, also positiv, entgegen der Annahme (19).

Ebenso verhält es sich mit Ungleichungen, wobei aber die schärfere Fassung 6. des Fundamentalsatzes angewandt werden muß.

Wenn z. B. f und φ zwei Rechenverbindungen sind, und es gilt für alle rationalen Zahlen $a, b, \ldots$, die der Bedingung $\varphi(a, b, \ldots) > 0$ genügen, der Satz, daß auch $f(a, b, \ldots) > 0$ ist, so ist auch für alle irrationalen Zahlen, die der Bedingung $\varphi(\alpha, \beta, \ldots) > 0$ genügen, $f(\alpha, \beta, \ldots) > 0$. Denn wäre $\varphi(\alpha, \beta, \ldots) > 0$, aber $f(\alpha, \beta, \ldots) < 0$, so nehme man zwei negative Zahlen h, h' und zwei positive Zahlen k, k' so an, daß

$$h < f(\alpha, \beta, \ldots) < h', \quad k < \varphi(\alpha, \beta, \ldots) < k'$$

ist. Dann kann man für die $\alpha, \beta, \ldots$ solche Näherungswerte $a, b, \ldots$ annehmen, daß $\varphi(a, b, \ldots)$ noch positiv und $f(a, b, \ldots)$ negativ

bleibt, was der Annahme widerspricht. Um aber zu zeigen, daß $f(\alpha, \beta, \ldots)$ nicht Null sein kann, hat man die schärfere Fassung des Fundamentalsatzes anzuwenden. Denn nach dieser kann man, wenn $f(\alpha, \beta, \ldots) = 0$ ist, die Näherungswerte $a, b, \ldots$ so annehmen, daß $\varphi(a, b, \ldots)$ positiv bleibt, während $f(a, b, \ldots)$ negativ ausfällt.

Von den Sätzen, die durch diese Betrachtung allgemein erwiesen sind, führen wir hier die folgenden an:

1) Das kommutative und das associative Gesetz bei der Addition und Multiplikation.

2) Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition:

$$(\alpha - \beta) - \beta = \alpha.$$

3) Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation:

$$(\alpha / \beta)\, \beta = \alpha.$$

4) Eine Summe wächst, wenn der eine Summand wächst.

5) Ein Produkt aus positiven Faktoren wächst, wenn einer der Faktoren wächst, und um so mehr also, wenn alle Faktoren wachsen.

6) Die Differenz zweier Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem der Subtrahend kleiner oder größer ist als der Minuend.

7) Eine Potenz einer Zahl, die größer als 1 ist, wächst mit dem Exponenten und zwar über jede Grenze.

8) Eine Potenz einer positiven Zahl, die kleiner als 1 ist, ist positiv, sinkt aber mit wachsendem Exponenten unter jeden positivem Zahlenwert herunter.

§ 25. Unendliche Dezimalbrüche.

1. Es sei A_n ein Dezimalbruch mit n Stellen nach dem Komma und beliebigen Stellen vor dem Komma, so daß A_0 eine positive ganze Zahl oder auch Null ist. Es sei außerdem eine Rechenvorschrift, ein Algorithmus, gegeben, durch den man aus A_n in eindeutiger Weise einen Dezimalbruch A_{n+1} gewinnen kann, der eine Stelle mehr enthält als A_n, in allen früheren Stellen aber mit A_n übereinstimmt. Dieser Algorithmus soll so beschaffen sein, daß er ohne Ende fortsetzbar ist. Ein solcher Algorithmus ist z. B. die genäherte Berechnung der Quadratwurzel aus einer nicht quadratischen Zahl nach § 21. Wir nennen einen solchen Algorithmus oder genauer gesagt, die durch ihn erzeugte Ziffernreihe mit dem Komma an einer bestimmten Stelle, einen unendlichen Dezimalbruch.

Jedem unendlichen Dezimalbruch läßt sich nun eine bestimmte Zahl in folgender Weise zuordnen.

Setzt man

$$A'_n = A_n + 10^{-n}, \tag{1}$$

so ist, wenn $n > 0$ ist, A'_n ein Dezimalbruch, der aus A_n entsteht, wenn man die letzte Ziffer um eine Einheit erhöht (wobei, wenn die letzte Ziffer von A_n gleich 9 ist, 0 dafür gesetzt und die vorangegangene Ziffer um 1 erhöht wird). Durch Anhängen einer $(n+1)^{\text{ten}}$ Ziffer an A_n entsteht A_{n+1}, und es ist

$$A_{n+1} = A_n + z\,10^{-n-1}$$
$$A'_{n+1} = A_n + (z+1)\,10^{-n-1},$$

woraus hervorgeht

$$A_n \leqq A_{n+1} < A'_{n+1} \leqq A'_n. \tag{2}$$

Die Zahlen $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ bleiben also alle unter A'_n und die $A'_n, A'_{n+1}, A'_{n+2}, \ldots$ sind alle größer als A_n.

Es haben also die A_n eine obere Grenze und die A'_n eine untere Grenze, und da $A'_n - A_n = 10^{-n}$ für ein genügend großes n unter jeden Wert heruntersinkt, so sind diese beiden Grenzen nicht voneinander verschieden. Die durch diese beiden Grenzen definierte Zahl α heißt der Zahlenwert des unendlichen Dezimalbruches. Er liegt seiner Größe nach zwischen je zwei A_n, A'_n, die der obere und der untere Näherungswert von α heißen. Sie kommen einander und auch der Zahl α um so näher, je größer n ist. Da die A_n alle positiv sind, so ist auch α positiv.

2. Ebenso können wir jeder positiven Zahl α einen unendlichen Dezimalbruch zuordnen. Wir ordnen die rationalen Brüche mit dem Nenner 10^n der Größe nach, und bezeichnen den größten unter ihnen, der nicht größer als α ist, mit A_n, setzen also

$$A_n \overline{\overline{<}} \alpha < A'_n. \tag{3}$$

Es gibt dann eine und nur eine Ziffer z, für die

$$A_{n+1} \overline{\overline{<}} \alpha < A'_{n+1}, \tag{4}$$

und wir können also den Dezimalbruch A_n in eindeutiger Weise so fortsetzen, daß α als obere Grenze der A_n erscheint.

3. Es ist noch die Frage zu beantworten, ob zwei verschieden unendliche Dezimalbrüche denselben Zahlenwert haben können.

Nehmen wir an, es haben zwei verschiedene Dezimalbrüche mit den unteren Näherungswerten A_n und B_n denselben Zahlenwert α, so müssen A_n und B_n an irgend einer Stelle voneinander verschieden sein. Seien a_k und b_k die ersten Ziffern, die in A_n und B_n nicht übereinstimmen, und sei etwa $a_k < b_k$. Dann ist

$$(5)\qquad \begin{aligned} B_k - A_k &= (b_k - a_k)\,10^{-k},\\ B_k - A'_k &= (b_k - a_k - 1)\,10^{-k} \end{aligned}$$

und folglich, wenn $n > k$, also nach (2) $B_n > B_k$, $A'_n < A'_k$ ist,

$$(6)\qquad B_n - A'_n \overline{\gtrless} (b_k - a_k - 1)\,10^{-k}.$$

Da nun $B_n - A'_n$ unter jeden Zahlenwert heruntersinken muß, so muß $b_k - a_k - 1 = 0$ sein, also

$$(7)\qquad b_k = a_k + 1,$$

und folglich nach (6) für jedes $n \geqq k$

$$(8)\qquad B_n = A'_n = A_n + 10^{-n}.$$

Es ist also auch, wenn die $(n+1)^{\text{ten}}$ Ziffern mit a_{n+1}, b_{n+1} bezeichnet werden:

$$(9)\qquad B_n + b_{n+1}10^{-n-1} = A_n + (a_{n+1} + 1)\,10^{-n-1},$$

also nach (8): $10^{-n} + b_{n+1}10^{-n-1} = (a_{n+1} + 1)\,10^{-n-1}$, d. h.

$$a_{n+1} = b_{n+1} + 9.$$

Da aber a_{n+1} nicht größer als 9 sein kann, so muß $b_{n+1} = 0$, $a_{n+1} = 9$ sein, sobald $n \overline{\gtrless} k$ ist; und dann haben auch in der Tat die beiden Dezimalbrüche A_n und B_n denselben Grenzwert, nämlich den endlichen Dezimalbruch B_k. Zwei Dezimalbrüche wie z. B.

$$0{,}999\ldots,\quad 1{,}000\ldots$$

haben denselben Zahlenwert 1.

4. Hiernach hätten wir die Theorie der Irrationalzahlen auch von den unendlichen Dezimalbrüchen aus begründen können. Es wäre dies darauf hinaus gekommen, daß man die Schnitte nicht im Gebiete aller rationalen Brüche, sondern nur im Bereich der (endlichen) Dezimalbrüche gemacht hätte. Einerseits hätte dies den Vorzug gehabt, daß die Begriffsbildung unmittelbar an den gebräuchlichen Algorithmus der Berechnung solcher Zahlen angeknüpft hätte. Andererseits aber wäre die Beweisführung weniger einfach geworden. Die Erscheinung, daß gewisse Zahlen zwei verschiedene Schnitte erzeugen, die sich bei der ersten Betrachtung bei allen rationalen Zahlen zeigt, tritt in der zweiten Betrachtung nur bei den Dezimalbrüchen auf.

§ 26. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche.

1. Ein gemeiner Bruch kann nur dann als Dezimalbruch geschrieben werden, wenn er durch Multiplikation mit einer Potenz von 10 in eine ganze Zahl verwandelt werden kann. Dies ist dann und

nur dann möglich, wenn in der reduzierten Form des Bruches m/n der Nenner n keine anderen Primfaktoren enthält als 2 und 5, wenn also $n = 2^a 5^b$ ist, wo a und b ganze Zahlen sind; denn dann ist, wenn c ganzzahlig und nicht kleiner als die größere der beiden Zahlen a und b ist, $10^c m/n$ eine ganze Zahl.

Haben wir aber irgend einen Bruch m/n, so können wir diesen auf folgendem Wege mit Dezimalbrüchen in Beziehung setzen.

Nach dem Verfahren der Division können wir einen Quotienten z und einen Rest m_1, der kleiner als n ist, so bestimmen, daß

$$m = zn + m_1 \tag{1}$$

wird. Darin ist z eine ganze Zahl, die positiv oder auch Null ist. Ebenso ist m_1 positiv und kleiner als n und nur dann gleich Null, wenn m durch n teilbar, also m/n eine ganze Zahl ist.

Wir verfahren nun ebenso mit $10m_1$, setzen also

$$10m_1 = z_1 n + m_2, \tag{2}$$

und hiernach ist

$$10m_1 \geqq z_1 n,$$

also $z_1 < 10$. Es ist also z_1 eine Ziffer (0, 1, 2, ... 9). Ist $m_2 = 0$, so ist m/n gleich dem Dezimalbruch z, z_1, ist aber m_2 positiv, so ist es kleiner als n, und wir können nach derselben Regel fortfahren:

$$\begin{aligned} 10m_2 &= z_2 n + m_3 \\ 10m_3 &= z_3 n + m_4 \\ &\cdots\cdots \\ 10m_s &= z_s n + m_{s+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

so lange keine der Größen $m_1, m_2, \ldots m_s$ Null geworden ist. Die $z_1, z_2, \ldots z_s$ sind Ziffern, während z auch eine größere ganze Zahl sein kann. Es folgt nun aus (1), (2), (3)

$$\frac{m}{n} = z + \frac{m_1}{n},$$

$$\frac{m_1}{n} = z_1 10^{-1} + \frac{m_2}{n} 10^{-1},$$

$$\frac{m_2}{n} = z_2 10^{-1} + \frac{m_3}{n} 10^{-1}, \text{ u. s. f.}$$

und hieraus

$$\frac{m}{n} = z + z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + \cdots + z_s 10^{-s} + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}$$

oder als Dezimalbruch geschrieben:

$$\frac{m}{n} = z, z_1 z_2 \cdots z_s + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}. \tag{4}$$

Ist $m_{s+1} = 0$, so ist m/n als Dezimalbruch geschrieben, und dies kann also nur in dem vorher erwähnten Falle eintreten, wenn n (bei reduzierter Darstellung des Bruches) die Form $2^a 5^b$ hat. In anderen Fällen kann die Rechnung, welche, wie man sieht, nichts anderes als die gewöhnliche Division der Elementararithmetik ist, unbegrenzt fortgesetzt, also in (4) die Zahl s beliebig groß angenommen werden. Der Dezimalbruch

$$\delta_s = z, z_1 z_2 \cdots z_s \tag{5}$$

ist dann immer kleiner als der gemeine Bruch

$$\gamma = \frac{m}{n} \tag{6}$$

und da $m_{s+1} < n$ ist, so ist der Unterschied $\gamma - \delta_s$ kleiner als 10^{-s}. Dieser Unterschied wird also um so kleiner, je größer die Stellenzahl des Bruches δ_s ist, und sinkt, wenn s groß genug ist, unter jeden vorgeschriebenen Zahlenwert herab. Man kann also in allen Anwendungen, in denen die Zahlen überhaupt nur approximativ bekannt sind, z. B. in Rechnungen, deren Daten auf Messungen beruhen, die gemeinen Brüche mit jedem vorgeschriebenen Grad der Genauigkeit durch Dezimalbrüche ersetzen. Man nennt dann diesen Dezimalbruch δ_s einen Näherungswert des gemeinen Bruches γ. Die Ermittelung des Dezimalbruches δ_s aus γ heißt (wenn auch uneigentlich) die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch.

Man schreibt dann auch die Gleichung (4), indem man den Rest $m_{s+1}/10^s n$ nicht mit in die Bezeichnung aufnimmt, und die unbestimmte Fortsetzbarkeit durch Punkte andeutet:

$$\frac{m}{n} = z, z_1 z_2 z_3 \cdots.$$

Bei der Berechnung der Ziffern $z_1, z_2, \ldots$ ist es gleichgültig, ob der Bruch m/n zuvor in die reduzierte Form gebracht ist oder nicht, ob also m und n einen gemeinschaftlichen Teiler haben oder nicht.

2. Die Ziffernreihe

$$Z = z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots$$

heißt die Mantisse des Bruches m/n (nach Gauß, Disq. arithmeticae, Art. 312). Die Mantisse bricht ab, wenn m/n genau durch einen Dezimalbruch darstellbar ist; sonst aber läßt sie sich unbegrenzt fortsetzen. Zwei Mantissen

$$Z = z_1\, z_2\, z_3 \cdots$$
$$Z' = z_1' z_2' z_3' \cdots$$

heißen verschieden, wenn bei hinlänglicher Fortsetzung endlich

zwei an gleicher Stelle stehende Ziffern z_s, z_s' voneinander verschieden sind.

Brüche, die sich um ganze Zahlen voneinander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse, und daher genügt es, um die Mantissen aller Brüche mit dem Nenner n zu erhalten, wenn wir nur die echten Brüche m/n betrachten.

Es gilt der Satz:

Verschiedene echte Brüche γ und γ' haben verschiedene Mantissen.

Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, es sei $\gamma' > \gamma$ und bestimmen, was nach § 18, 8. immer möglich ist, s so, daß

$$10^s(\gamma' - \gamma) > 1$$

wird. Dann ist

$$\gamma' > \gamma + 10^{-s}. \tag{7}$$

Setzen wir

$$\delta_s = 0,\ z_1 z_2 \cdots z_s, \quad \delta_s' = 0,\ z_1' z_2' \cdots z_s',$$

so ist, wie wir gesehen haben,

$$\gamma > \delta_s, \quad \gamma' < \delta_s' + 10^{-s},$$

und folglich ist nach (7)

$$\delta_s' + 10^{-s} > \gamma' > \gamma + 10^{-s} > \delta_s + 10^{-s},$$

also $\delta_s' > \delta_s$. Es müssen also die Mantissen Z und Z' von γ und γ' spätestens in der s^{ten} Stelle voneinander verschieden sein.

Dieser Satz wird ergänzt durch den ähnlichen:

Kein echter Bruch γ hat eine Mantisse, die aus lauter Neunern besteht.

Denn wählen wir s so groß, daß $10^s(1 - \gamma) > 1$, also $1 > \gamma + 10^{-s}$ ist, so ist um so mehr $1 > \delta_s + 10^{-s}$. Wenn aber $z_1, z_2, \ldots z_s$ alle gleich 9 wären, so wäre $\delta_s + 10^{-s} = 1$, was dieser Ungleichung widerspricht. Es kommt also spätestens in der s^{ten} Stelle der Mantisse von γ eine Ziffer vor, die kleiner als neun ist.

Jeder gemeine Bruch ruft in der Gesamtheit der unendlichen Dezimalbrüche einen Schnitt hervor, und hiernach reihen sich also auch die gemeinen Brüche in das Zahlengebiet ein, das durch die Gesamtheit der unendlichen Dezimalbrüche bestimmt ist.

Die besonderen Eigentümlichkeiten der unendlichen Dezimalbrüche, die den rationalen Brüchen entsprechen, werden wir später noch eingehender studieren.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

§ 27. Meßbarkeit.

1. Wir haben nun die Frage zu erörtern, in welcher Weise der Zahlbegriff, der, wie schon mehrfach hervorgehoben ist, ein rein geistiger ist, auf die Dinge der Außenwelt angewandt wird. Die Anwendung der natürlichen Zahlen geschieht einfach durch das Zählen, wie schon im ersten Abschnitt auseinandergesetzt ist, worauf wir hier nicht noch einmal zurückkommen wollen. Die gebrochenen rationalen und die irrationalen Zahlen werden durch die Tätigkeit des Messens auf die Außenwelt angewandt.

Meßbar ist alles, was auf unsere Sinne Eindruck in verschiedener Stärke macht, z. B. Lichtintensitäten, Temperaturen, Tonhöhen, Tonstärken, Gewichte, Härte, Schmerz u. s. w. Die unmittelbare Sinneswahrnehmung gestattet aber nur unbestimmte Schätzungen des Mehr oder Weniger. Exakte Messungen sind erst dann möglich, wenn es gelungen ist, diese Vorgänge mit Raum und Zeit derart in Verbindung zu setzen, daß die Stärke des Eindrucks der Größe einer räumlichen und zeitlichen Veränderung entspricht, und dies geschieht durch die Meßinstrumente. Bei den Raumgrößen haben wir wieder dreierlei verschiedenartige zu unterscheiden; nämlich Längen, Flächen und Körper. Die Geometrie lehrt, diese drei auf eines, das Längenmaß, zurückzuführen.

Daß wir den Raum messen können, beruht auf der Voraussetzung, daß es einen Körper gibt, den wir in sonst unverändertem Zustand von einem Ort an einen anderen bringen können. Ein solcher Körper heißt ein Maßstab. Darin liegt also nicht nur eine Annahme über die Natur des Raumes, sondern auch über die ihn erfüllenden Körper.

Dem Messen von Zeiträumen liegt die Annahme zu grunde, daß wir einen Vorgang beobachten können, der zu allen Zeiten in der-

selben Weise abläuft, also eine immer gleichmäßig gehende Uhr, als deren vollkommenste die Umdrehung der Erde um ihre Axe zu betrachten ist.

Eine dritte Art von Grundgrößen sind die Massen, die wir durch die Wage messen, deren Maß also auf der Voraussetzung einer richtigen Wage und unveränderlicher Massen beruhen.

Alle diese Voraussetzungen sind in der Wirklichkeit nicht genau erfüllt, am besten wohl die erste, am wenigsten die letzte, und so bleibt wohl kaum etwas anderes übrig, als die idealen Maße aufzufassen als eine Art von Mittelwerten, die sich durch Ausgleichung der verschiedenen Abweichungen durch lange und vielfältige Erfahrung in unserer Vorstellung gebildet haben.

2. Während im reinen Zahlenreiche selbst der Unterschied in den Größen nur eine willkürliche Schöpfung des Geistes ist, dem eine anschauliche Bedeutung nicht beiwohnt, verbinden wir mit den meßbaren Dingen der Außenwelt unmittelbar eine Vorstellung der Größen nach dem Grad und der Stärke sinnlicher Eindrücke. Selbst mit Ausdrücken wie „sehr groß“, „sehr klein“, „angenähert“ verbinden wir wenigstens eine ungefähre Vorstellung, indem wir etwa sehr klein solche Größen nennen, die wir nur mit Mühe oder gar nicht mehr durch unsere Sinne direkt oder mit Hilfe der Instrumente wahrnehmen können.

Da keine Messung mit absoluter Genauigkeit ausgeführt werden kann, auch unsere geometrischen Konstruktionen uns keine wirklichen Punkte, Linien oder Flächen liefern, so genügen zur Darstellung empirisch gegebener Größenverhältnisse die rationalen Zahlen; nirgends ist hier eine Nötigung zu weitergehenden Zahlenbildungen.

Gleichwohl können wir uns nicht wohl des Gedankens entschlagen, daß z. B. die Diagonale eines Quadrates oder die Kreisperipherie eine ganz bestimmte Länge haben, die durch Zahlen ausdrückbar sind; und ähnlich ist es bei Zeiträumen oder Gewichten; und wir sind geneigt anzunehmen, daß das ganze Zahlenreich in den meßbaren Dingen sein Äquivalent findet[1]).

3. Wir erblicken das Wesen der Meßbarkeit einer Menge (z. B. Längen, Zeiträume, Massen) in folgenden Bestimmungen:

---

1) So klar und einfach der Stetigkeitsbegriff im Gebiete der reinen Zahlen uns vor Augen liegt, so schwer — vielleicht unmöglich — ist es, zu einem Verständnis der Stetigkeit bei den meßbaren Größen, also bei den Objekten der Außenwelt zu gelangen.

Paul du Bois-Reymond hat in dem Buch über „Allgemeine Funktionentheorie“ (Tübingen 1882) diese Frage studiert und kommt zu dem Ergebnis, daß zwei verschiedene einander ausschließende Standpunkte, der idealistische und der empiristische, gleich möglich und gleich berechtigt sind.

1. Zwei Elemente a, b der Menge können einander gleich sein und wenn sie es nicht sind, ist eine von ihnen die größere, die andere die kleinere.

2. Ist a irgend ein Element der Menge, so gibt es Elemente, die kleiner sind als a (unbegrenzte Teilbarkeit).

3. Sind a, b zwei (gleiche oder verschiedene) Elemente, so gibt es ein drittes Element $c = a + b$ der Menge, das der Summe der beiden Elemente gleich ist. Die Summe ist größer als jeder der Summanden.

Für die Summenbildung gelten das kommutative und das associative Gesetz der Addition (§ 7).

4. Ist b kleiner als c, so gibt es ein bestimmtes Element $a = c - b$ von der Beschaffenheit, daß $a + b = c$ ist.

5. Durch Wiederholung der Summenbildung aus mehreren gleichen Elementen a gelangt man zu dem Begriff des Vielfachen ma, worin m eine natürliche Zahl ist. Für die Vielfachen gilt das Archimedische Prinzip:

Sind a und b irgend zwei Elemente der Menge, so gibt es immer ein Vielfaches ma von a, das größer ist als b. Es gibt also in einer meßbaren Menge weder ein kleinstes noch ein größtes Element, und aus 2., 3., 4. folgt, daß es zwischen irgend zwei Elementen noch andere Elemente gibt. Endlich soll noch gelten:

6. Ist a ein beliebiges Element der Menge und n eine natürliche Zahl, so existiert ein Element b von der Beschaffenheit, daß $nb = a$ ist. Dieses Element b heißt der n^{te} Teil von a und wird mit $b = a/n$ bezeichnet. Daß es nur ein solches Element b geben kann, ist eine leicht zu ziehende Folgerung aus den anderen Voraussetzungen. Denn ist $b' > b$, so ist $nb' = nb + n(b' - b)$ größer als nb.

§ 28. Verhältnisse.

1. Zwei Elemente a, b einer meßbaren Menge, zu denen zwei natürliche Zahlen p, q angegeben werden können, die der Bedingung

$$qa = pb \tag{1}$$

genügen, heißen kommensurabel.

Die Gleichung (1) besagt, daß, wenn wir a in p Teile, b in q Teile teilen (nach § 27, 6.), diese Teile einander gleich sind:

$$a/p = b/q = d, \tag{2}$$

und daß dann $a = pd$, $b = qd$ ist. Es ist also d ein gemeinschaftliches Maß von a und b (daher „kommensurabel“).

Man sagt in diesem Falle, die Elemente a und b haben dasselbe Verhältnis zueinander, wie die beiden Zahlen p und q.

Die Gleichung (1) bleibt bestehen, wenn die Elemente a, b mit demselben Multiplikator vervielfältigt oder durch denselben Teiler geteilt werden, und dasselbe gilt, wenn die Zahlen p, q mit einem gemeinschaftlichen Faktor multipliziert, oder wenn ein gemeinschaftlicher Teiler weggehoben wird. Das Verhältnis der Zahlen p, q bleibt daher ungeändert, wenn der numerische Wert des Bruches p/q ungeändert bleibt, und man kann also die Verhältnisse zweier Zahlen und folglich auch die Verhältnisse irgend zweier kommensurablen Elemente der meßbaren Menge den rationalen Brüchen eindeutig zuordnen. Man deutet dann die Gleichheit des Verhältnisses statt durch (1) auch durch die Gleichung

$$a : b = p : q \quad \text{oder} \quad a/b = p/q$$

an, und man nennt das Verhältnis a/b größer als ein anderes $a'/b' = p'/q'$, wenn der Bruch p/q größer ist als p'/q'.

Man nennt a und b Zähler und Nenner des Verhältnisses. Ist $a = b$, so ist ihr Verhältnis $= 1$. Ist das Verhältnis p/q gegeben, so kann man von den beiden Elementen a, b eines noch beliebig annehmen. Denn ist z. B. p, q und b gegeben, so teile man das Element pb in q Teile, um das Element a zu erhalten, das der Gleichung (1) genügt.

2. Hält man dieses eine Element b fest, so erhält jedes andere Element a der Menge, das mit b kommensurabel ist, eine bestimmte Zahl p/q zugeordnet, und das Element b selbst erhält die Zahl 1. Es heißt darum die Einheit einer Maßbestimmung. Die Wahl der Einheit steht in unserer Willkür und wird durch Zweckmäßigkeitsgründe bestimmt. Von größter Wichtigkeit aber ist es, namentlich für wissenschaftlichen Gebrauch, daß die Einheit unzweideutig definiert sei und zu jeder Zeit unverändert wieder aufgefunden werden kann. Freilich kann diese Forderung niemals mit absoluter Strenge erfüllt werden, aber es sind große Hilfsmittel aufgewandt worden, um ihr nach Möglichkeit zu genügen.

Als Einheit der Zeit sind von Alters her der Tag[1]) und seine Unterabteilungen, Stunde, Minute, Sekunde, als Einheiten angenommen worden. Die Teilung durch die Zahlen 24, 60 ist uralt und tief eingewurzelt, und es ist wohl in absehbarer Zukunft nicht zu erwarten, daß sie etwa einer dezimalen Einteilung Platz machen werde.

In Bezug auf das Längenmaß und das Massenmaß, welche für

1) Genauer der mittlere Sonnentag, d. h. der Durchschnittswert der Zeit, die von einer Kulmination der Sonne bis zur nächsten verstreicht.

den gewöhnlichen Gebrauch mit dem Gewichtsmaß zusammenfällt, herrschte bis vor kurzem die bunteste Mannigfaltigkeit und selbst Unsicherheit. Die republikanische Regierung in Frankreich hat 1799 das Meter als Längeneinheit eingeführt, das ursprünglich als der zehnmillionste Teil des Erdquadranten definiert war, in Wirklichkeit aber auf ein willkürliches, genau bestimmtes und sicher aufbewahrtes Normalmeter gegründet wird. Für die meisten Kulturstaaten, die der im Jahre 1875 abgeschlossenen internationalen Meterkonvention beigetreten sind, ist das Meter jetzt die gesetzliche Längeneinheit, die nach strenger Dezimalteilung weiter abgeteilt ist.

Auf die metrische Längeneinheit gründen sich die Einheiten für Flächen- und für Körpermaß, deren Einheiten das Quadratmeter und das Kubikmeter oder deren dezimale Teile sind, und auch die Masseneinheit wird darauf zurückgeführt, indem das Gramm definiert wird als Masse eines Kubikcentimeters reinen Wassers im Zustand seiner größten Dichtigkeit[1]).

Auch Winkel bilden eine meßbare Menge eigener Art. Ihre Messung wird praktisch auf Längenmessung zurückgeführt, nämlich auf die Ablesung an einem geteilten Kreise.

Sie haben aber ihre eigene Art Einheit, und zwar sind zweierlei Winkeleinheiten in Gebrauch, eine für praktische Zwecke, die andere mehr bei theoretischen Untersuchungen. Um die erstere zu gewinnen, wird der ganze Kreis in 360 gleiche Teile, Grade genannt, geteilt. Der Grad wird in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden weiter geteilt. Der rechte Winkel hat 90 Grad, des gestreckte Winkel 180 Grad. Abkürzend bezeichnet man Grade, Minuten und Sekunden auch so: z. B. 57^0, $17'$, $44{,}8''$, sprich 57 Grad, 17 Minuten, 44,8 Sekunden.

Die zweite Art der Winkeleinheit ist der Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist. Hierbei erhält der Winkel von 180 Grad die Maßzahl $\pi = 3{,}14159265\ldots$ nämlich die Länge der Kreisperipherie, deren Durchmesser die Längeneinheit ist. Die Maßzahl 1 erhält ein Winkel von $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ oder 206264,8 Sekunden.

Maßzahlen im strengen Sinn des Wortes sind nur die positiven (absoluten) Zahlen. Nichtsdestoweniger ist es oft von großem Nutzen, auch negative Zahlen anzuwenden, um gewisse gegensätzliche Beziehungen bei den gemessenen Größen auszudrücken. Man denkt sich dann die Zahl nicht eigentlich als Ausdruck für die gemessene Größe, sondern als Bezeichnung eines Punktes, den man erhält, wenn man die gemessene Größe von einem bestimmten festen Anfangspunkt aus abmißt. Dann geben die positiven Zahlen die Punkte auf der einen

1) Vgl. den Artikel „Maß und Messen“ von Runge in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Seite, die negativen die Punkte auf der anderen Seite des Anfangspunktes. Dies ist am einleuchtendsten bei Längenmaß und bei Zeitmaß, wird aber auch bei Geschwindigkeiten, Kräften und bei manchem anderen angewandt. Man gewinnt dann den Vorteil, daß sich nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraktion allgemein ausführen läßt.

§ 29. Physikalische Maße.

1. Zunächst und unmittelbar können meßbare Dinge nur durch Einheiten derselben Art gemessen werden, so Längen durch eine Länge, Flächen durch eine Fläche, Zeiten durch eine Zeit, Geschwindigkeiten durch eine Geschwindigkeit, elektrische Widerstände durch einen elektrischen Widerstand, und im praktischen Leben, wenn es nicht auf den höchsten Grad der Genauigkeit ankommt, ist dies auch das Zweckmäßigste und Einfachste. Für die Wissenschaft aber ist es von größter Bedeutung, daß man nicht für jede dieser unzähligen meßbaren Größen, deren Zahl sich mit dem Fortschritt der Wissenschaft noch vergrößert, eine besondere Maßeinheit braucht, die in gesichertem unverändertem Zustand aufbewahrt werden müßte, und es ist darum ein großer Fortschritt in der neueren Physik, daß es gelungen ist, alle diese Maße auf die drei Grundmaße der Länge, der Zeit und der Masse zurückzuführen.

Dies ist zuerst von Gauß für die magnetischen Maße durchgeführt, und ist in der neueren Elektrizitätslehre und in ihren technischen Anwendungen von großer Wichtigkeit geworden.

Eine Einheit irgendwelcher Art, die durch die drei Einheiten der Länge, der Zeit, der Masse ausgedrückt ist, heißt eine absolute Einheit, und der ganze Komplex dieser Maße das absolute Maßsystem.

Es wird am besten sein, dies an einigen Beispielen klar zu legen, die sich leicht vermehren ließen.

2. Geschwindigkeit. Wenn sich ein Körper bewegt, so kann er zur Durchlaufung derselben Wegstrecke verschieden lange Zeiten gebrauchen, oder er kann in gleich langen Zeiträumen verschieden lange Wegstrecken durchlaufen. Darnach ist seine Geschwindigkeit verschieden.

Wenn ein Körper in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, das eine Mal den Weg a, das andere Mal den Weg b und ein drittes Mal den Weg $a + b$ durchläuft, so ist seine Geschwindigkeit bei der dritten Bewegung die Summe der Geschwindigkeiten in den beiden ersten, und damit sind die Kriterien der Meßbarkeit für die Geschwindigkeit gegeben.

Die Geschwindigkeit wird verdoppelt, verdreifacht u. s. w., wenn in derselben Zeit die doppelte oder dreifache Strecke zurückgelegt wird, oder wenn der Körper zur Durchlaufung der gleichen Strecke nur die Hälfte oder den dritten Teil der Zeit gebraucht.

Das Geschwindigkeitsmaß wird aber dadurch auf Raum- und Zeitmaß zurückgeführt, daß man eine solche Geschwindigkeit als Einheit nimmt, bei der in der Zeiteinheit die Einheit der Weglänge zurückgelegt wird.

Ein Körper, der in der Zeit τ die Strecke λ zurücklegt, hat die Geschwindigkeit λ/τ, und es erhält also die Division dieser benannten Zahlen hierdurch eine bestimmte Bedeutung, aber in einer Größenart, die von den beiden, der Länge und der Zeit, verschieden ist.

Die Art, wie die Wahl der Einheiten in die Bezeichnung aufgenommen werden, zeigen die folgenden Beispiele. Nehmen wir an, ein Schnellzug legt in der Stunde einen Weg von 70 Kilometer zurück. Man schreibt dann: seine Geschwindigkeit ist

$$70 \, \frac{\text{Kilometer}}{\text{Stunde}}$$

oder

$$70\,000 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}} = 1167 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Minute}} = 19{,}45 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Ein Punkt des Erdäquators durchläuft bei der Umdrehung der Erde einen Weg, der gleich dem Umfang des Äquators, angenähert gleich 40 Millionen Meter ist. Seine Geschwindigkeit ist also

$$40\,000\,000 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Tag}} = 463 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}.$$

Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt in der geographischen Breite 50° 30′ (Berlin) oder 48° 35′ (Straßburg)?

Ein Fußgänger legt den Kilometer in 12 Minuten zurück. Seine Geschwindigkeit ist also

$$\frac{1}{12} \, \frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute}} \quad \text{etwa} \quad = 1{,}4 \, \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}.$$

Der Abstand der Erde von der Sonne beträgt etwa 149 Millionen Kilometer und der Umfang der Erdbahn 936 Millionen Kilometer. Diesen Weg legt die Erde in 365 Tagen zurück, was eine Geschwindigkeit von etwa

$$29\,600 \text{ Meter/Sekunden}$$

oder rund 30 Kilometer in der Sekunde ergibt.

Welche Geschwindigkeit haben Merkur, Venus, Mars, Jupiter, wenn ihre mittleren Entfernungen von der Sonne und ihre Umlaufszeiten folgendermaßen angenommen werden:

Merkur	58	Millionen Kilometer	88	Tage
Venus	108	„ „	225	„
Mars	227	„ „	688	„
Jupiter	777	„ „	4333	„

und wenn die Bahnen als Kreise betrachtet werden?

Die Geschwindigkeit des Schalles in trockener Luft ist etwa 331 Meter/Sekunden, während die Lichtgeschwindigkeit 300 Millionen Meter/Sekunden beträgt.

3. Beschleunigung. Ein anfahrender Eisenbahnzug hat nicht sofort seine volle Geschwindigkeit, sondern erlangt sie erst allmählich nach Verlauf einer gewissen Zeit. Ebenso verliert er die Geschwindigkeit beim Halten nicht plötzlich.

Ein zur Erde fallender schwerer Körper durchläuft seinen Weg nicht überall mit derselben Geschwindigkeit, sondern die Geschwindigkeit wächst allmählich mit der Tiefe. Hieraus entspringt der Begriff der Beschleunigung und Verzögerung einer Bewegung.

Als Einheit der Beschleunigung wird die Zunahme der Geschwindigkeit um die Geschwindigkeits-Einheit in der Einheit der Zeit betrachtet.

Wenn ein Körper seine beschleunigte Bewegung mit der Geschwindigkeit Null beginnt, und nach Verlauf der Zeit τ die Geschwindigkeit v erlangt, so ist die Beschleunigung v/τ. Hat er in dieser Zeit τ den Weg λ durchlaufen, so werden wir unter λ/τ die Geschwindigkeit verstehen müssen, die der Körper gehabt haben müßte, wenn er ohne Beschleunigung in der gleichen Zeit den gleichen Weg durchlaufen haben würde. Diese ist aber das Mittel $\frac{1}{2}v$ aus der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Endgeschwindigkeit v, und wir erhalten also, wenn wir die Beschleunigung mit g bezeichnen,

$$\frac{1}{2}v = \lambda/\tau, \quad g = 2\lambda/\tau^2. \tag{1}$$

Beginnt die Bewegung nicht mit der Geschwindigkeit Null, sondern mit der Geschwindigkeit v_0, so ist

$$\frac{v + v_0}{2} = \lambda/\tau, \quad g = \frac{v - v_0}{\tau}. \tag{2}$$

Die Beschleunigung eines fallenden Körpers heißt auch die Beschleunigung der Schwere. Sie ist, wenn vom Luftwiderstand abgesehen wird, für alle Körper dieselbe und beträgt in der geographischen Breite von 45 Grad:

$$g = 9{,}8062 \text{ Met./Sek}^2.$$

Sie nimmt vom Äquator gegen die Pole hin etwas zu und beträgt am Äquator 9,761, am Pol 9,832. Der Körper fällt also in der ersten Sekunde um etwa 4,9 Meter.

Um die Weglänge für zwei Sekunden zu ermitteln, hat man in den Formeln (1) $\tau = 2$ zu setzen, und erhält also einen Weg von etwa 19,6 Meter. Also ist der Weg in der zweiten Sekunde 14,7 Meter.

Die Beschleunigung nimmt mit wechselnder Höhe über der Erdoberfläche ab, und zwar gilt dabei das Newtonsche Gesetz, daß die Beschleunigung an zwei Stellen im umgekehrten Verhältnis zu den Quadraten der Abstände vom Erdmittelpunkt steht, d. h. sind g, g_1 die Beschleunigungen der Schwere an zwei Stellen in den Entfernungen r, r_1 vom Erdmittelpunkt, so ist

$$g : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1{}^2} = r_1{}^2 : r^2.$$

Wie groß würde die Beschleunigung in der Entfernung des Mondes sein, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde zu 52 000, die Länge des Erdradius zu 858,5 Meilen angenommen wird? (Da nur das Verhältnis r_1/r vorkommt, so kommt es hierbei nicht auf die gewählte Längeneinheit an.)

$$g_1 = 9{,}8 \cdot \frac{858{,}5^2}{52\,000^2} = 0{,}0027 \text{ Meter/Sek}^2,$$
$$= 0{,}27 \text{ Centimeter/Sek}^2.$$

4. Kraft. Als Masseneinheit wird die Masse eines Kubikcentimeters reinen Wassers benutzt und „Gramm" genannt. Eine Masse hat dann den Zahlenwert m, wenn sie auf einer Wage der Masse von m Kubikcentimetern Wasser das Gleichgewicht hält.

Von der Masse ist wohl zu unterscheiden das Gewicht, worunter man das Produkt mg aus der Masse mit der Beschleunigung der Erdschwere versteht.

Während also die Masse eines Körpers etwas an allen Orten Gleichbleibendes ist, hängt sein Gewicht von dem Ort ab, an dem der Körper sich befindet. Es nimmt ab mit der Entfernung von der Erdoberfläche und mit der geographischen Breite.

Das Gewicht ist eine Kraft, mit der sich andere Kräfte, z. B. die Kraft unserer Muskeln, vergleichen lassen. Der Erfolg einer Kraft ist, wenn sie ungehindert wirken kann, eine Beschleunigung. Eine bestimmte Kraft bringt aber, wenn sie auf eine größere Masse wirkt, eine kleinere Beschleunigung hervor, und man kann also als Einheit der Kraft die Kraft ansehen, die der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt. Die so gebildete Einheit heißt, wenn man als Einheit der Masse das Gramm, als Einheit der Länge das Centimeter und als Einheit der Zeit die Sekunde annimmt, eine Dyne (von δύναμις). Es ist also

$$\text{eine Dyne} = 1 \cdot \frac{\text{Gramm Centimeter}}{\text{Sekunde}^2}.$$

Beispiel. Wie groß ist, in Dynen ausgedrückt, die Kraft, die die Erde auf den Mond ausübt?

Das Volumen der Erde beträgt etwa

$$1083 \cdot 10^{24} \text{ Kubikcentimeter}^{1)},$$

und diese Zahl würde also die Erdmasse in Gramm angeben, wenn sie nur aus Wasser bestände. Nun ist aber die mittlere Dichtigkeit etwa 5,5 mal so groß als die des Wassers, d. h. die Masse der Erde ist tatsächlich 5,5 mal so groß, als wenn sie ganz aus Wasser bestände, also etwa gleich

$$6 \cdot 10^{27} \text{ Gramm}.$$

Die Masse des Mondes ist etwa der 80te Teil von der Masse der Erde, und also ungefähr gleich

$$75 \cdot 10^{24}.$$

Diese Zahl hat man mit der in Centimeter und Sekunden ausgedrückten Beschleunigung der Erdschwere in der Entfernung des Mondes, also mit 0,27 zu multiplizieren, um die Zahl

$$2025 \cdot 10^{22}$$

für die Anzahl der Dynen zu erhalten, mit der die Erde auf den Mond wirkt.

Man kann auch eine Kraft direkt mit einem Gewicht vergleichen. Man hat dann als Einheit der Kraft das Gewicht eines Grammes an der Oberfläche der Erde, etwa in der mittleren geographischen Breite von 45°, wo die Beschleunigung der Schwere

$$g_0 = 981 \text{ Centimeter/Sekunden}^2$$

ist, anzunehmen, und erhält für die Kraft, die einer Masse m die Beschleunigung g erteilt, den Zahlenwert mg/g_0, durch den die Kraft in Gramm ausgedrückt ist.

So erhält man z. B. das Gewicht des Mondes in Gramm ausgedrückt, wenn man die Zahl $2025 \cdot 10^{22}$ durch 981 dividiert, also ungefähr

$$2 \cdot 10^{22} \text{ Gramm}$$

oder zweihunderttausend Billionen Doppelzentner.

---

1) Der Faktor 10^{24} bedeutet die Multiplikation mit 10 in der Potenz 24, also das Anhängen von 24 Nullen. Bei sehr großen Zahlen bedient man sich mit Vorteil dieser kürzeren Schreibweise. Natürlich sind die anzuhängenden Stellen in Wahrheit nicht Nullen, sondern andere Ziffern. Es wird daher diese Schreibweise nur in solchen Fällen anwendbar sein, wenn die genauen Werte der Zahlen nicht bekannt sind, oder wenn nichts darauf ankommt. Man nennt die Stellenzahl einer solchen Zahl wohl auch ihre Größenordnung. Häufig ist man in der Lage, Zahlen nicht in Bezug auf ihren genauen Wert, sondern nur in Bezug auf ihre Größenordnung zu vergleichen.

§ 30. Inkommensurable Größen.

1. Den bisherigen Betrachtungen und Definitionen lag die Voraussetzung zu Grunde, daß die zu einander in ein Verhältnis gesetzten Größen kommensurabel und ihre Verhältnisse daher rational seien, und für praktische Zwecke ist diese Annahme auch ausreichend. Jetzt aber müssen wir noch einen Schritt weiter gehen und auch irrationale Verhältnisse betrachten.

Nach dem Begriff der Meßbarkeit ist, wenn e irgend ein Element einer meßbaren Menge und r eine positive rationale Zahl ist, re gleichfalls ein bestimmtes Element derselben Menge. Ist nun a irgend ein Element dieser Menge, so erhalten wir einen Schnitt R/R' (§ 22, 4.), wenn wir alle Zahlen r, für die $re < a$ ist, zu R und alle Zahlen r', für die $r'e > a$ ist, zu R' rechnen, wobei eine Zahl r, für die $re = a$ ist, wenn sie existiert, nach Belieben zu R oder zu R' gerechnet werden kann. Durch diesen Schnitt R/R' ist nun eine allgemeine Zahl α definiert, und diese Zahl ordnen wir dem Element a zu. Wir setzen $\alpha e = a$, und nennen α die Maßzahl des Elementes a. Diese Zahl ändert sich natürlich, wenn das Element e, das die Einheit dieser Maßbestimmung darstellt, geändert wird. Ist $\beta e = b$ ein anderes Element derselben Menge, und ist $a < b$, so ist auch $\alpha < \beta$.

Daß es zu jedem Paar a, e einer meßbaren Menge eine bestimmte Maßzahl α gibt, ist hiernach eine Folgerung aus den Voraussetzungen, durch die wir die Meßbarkeit definiert haben; daß es aber auch umgekehrt bei gegebenem e zu jeder Zahl α ein bestimmtes Element a gibt, dessen Maßzahl α ist, ist eine neue Voraussetzung, die wir vermöge einer Art innerer Anschauung zu machen geneigt sind, und die wir von jetzt an machen wollen, die wir als die Stetigkeit der Menge bezeichnen.

Eine sinnliche Vorstellung kann mit diesem Begriff der Stetigkeit nicht verbunden werden, und keine äußere Erfahrung kann sie uns jemals bestätigen oder widerlegen. Das Reich der Zahlen aber ist eine meßbare Menge, der die Eigenschaft der Stetigkeit zukommt.

2. Hiernach gehen wir zu einer allgemeinen Definition der Verhältnisse über.

Euklid (Elemente Buch V) gibt folgende Definition: Wenn a, b zwei Elemente einer meßbaren Menge sind, und A, B zwei Elemente einer zweiten oder auch derselben meßbaren Menge, so nehme man irgend zwei natürliche Zahlen m und n. Es tritt dann von den folgenden drei Fällen immer einer und nur einer ein:

$$(1) \qquad 1)\ ma < nb, \quad 2)\ ma = nb, \quad 3)\ ma > nb.$$

Wenn nun immer, welche Zahlen m, n man auch nehmen mag, gleichzeitig auch

$$mA < nB, \quad mA = nB, \quad ma > nB \tag{2}$$

ist, so hat a dasselbe Verhältnis zu b wie A zu B.

Wir bezeichnen dies durch die Gleichung

$$a : b = A : B. \tag{3}$$

Wir bemerken noch, daß hierbei die Elemente der meßbaren Menge im absoluten Sinn (als positive Größen) zu verstehen sind. Es ergibt sich hieraus:

Das Verhältnis zweier positiver Zahlen α und β ist gleich dem Verhältnis der Zahl α/β zu der Zahl 1, also

$$\alpha : \beta = \alpha/\beta : 1. \tag{4}$$

Denn aus

$$m\alpha \lesseqgtr n\beta$$

folgt durch Division mit β:

$$m\frac{\alpha}{\beta} \lesseqgtr n \cdot 1.$$

Wir betrachten also die Zahl α/β als Maß für das Verhältnis der Zahlen α und β und für alle diesem gleichen Verhältnisse.

3. Das Verhältnis zweier Elemente a, b einer meßbaren Menge ist gleich dem Verhältnis ihrer Maßzahlen α, β. Wenn nämlich

$$m\alpha < n\beta \tag{5}$$

ist, so kann man zwischen $m\alpha$ und $n\beta$ zwei rationale Zahlen einschieben, die man in der Form mr', ns annehmen kann, und zwar so daß

$$m\alpha < mr' < ns < n\beta. \tag{6}$$

Es ist dann $\alpha < r'$ und $s < \beta$, und folglich ist, wenn e die Einheit bedeutet,

$$a < er', \quad es < b$$

und mithin nach (6)

$$ma < nb. \tag{7}$$

Ebenso kann man, wenn die Ungleichheit (7) vorausgesetzt wird, zwei rationale Vielfache der Einheit e, er', es so annehmen, daß

$$ma < mer' < nes < nb \tag{8}$$

wird, und daraus folgt

$$\alpha < r', \quad s < \beta,$$

also

(9) $$m\alpha < n\beta.$$

Ebenso kann man zeigen, daß die beiden Ungleichungen $ma > nb$ und $m\alpha > n\beta$ stets miteinander verbunden sind, woraus dann weiter folgt, daß auch $ma = nb$ immer $m\alpha = n\beta$ zur Folge hat und umgekehrt.

Hiernach ist der Quotient α/β auch das Maß für das Verhältnis von a zu b und ist von der Wahl der Einheit e unabhängig. Mit den Maßzahlen kann man rechnen wie mit allen Zahlen; es frägt sich aber, welche Bedeutung man den Ergebnissen dieser Rechnung beizulegen hat.

Der Addition und der Subtraktion pflegt man nur dann eine Bedeutung beizulegen, wenn die Maßzahlen derselben meßbaren Menge angehören; man wird z. B. nicht Zeiträume und Längen addieren oder subtrahieren. Beziehen sich aber beide Maßzahlen auf dieselbe Einheit, z. B. die Längeneinheit, so gibt ihre Summe und ihre Differenz die Maßzahl für die Summe und Differenz der gemessenen Größe in der gleichen Einheit.

Dies folgt bei rationalen Maßzahlen aus den Bestimmungen des § 27 und für irrationale aus der vorausgesetzten Stetigkeit.

Das Produkt von Maßzahlen gibt die Maßzahlen in einer neuen Menge, deren Einheit als das Produkt der Einheiten der beiden Faktoren definiert wird, und ebenso ist es bei den Quotienten. So ist das Produkt zweier Längen ein Flächenmaß, das Produkt dreier Längen ein Körpermaß, der Quotient einer Länge durch eine Zeit ist eine Geschwindigkeit. Der Quotient zweier Maßzahlen derselben Menge ist aber ein Verhältnis und als solches eine reine Zahl.

§ 31. Proportionen.

1. Eine Gleichung der Form

(1) $$a : b = c : d,$$

in der a, b, c, d Elemente meßbarer Mengen sind, heißt eine Proportion. Die Gleichung hat nur dann einen Sinn, wenn sowohl a zu b als c zu d ein Verhältnis hat, d. h. wenn a und b einerseits, c und d andererseits derselben meßbaren Menge angehören. Es können aber wohl die Mengen, der die beiden Paare a, b und c, d angehören, von einander verschieden sein, z. B. die eine das System von Massen, die andere das System von Längen sein.

Die Elemente a, b, c, d heißen die Glieder der Proportion, a die erste, b die zweite, c die dritte, d die vierte Proportionale.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Maßzahlen von a, b, c, d, so ergibt sich aus (1) eine *Zahlenproportion*:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \tag{2}$$

oder eine Gleichung:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \tag{3}$$

und aus den arithmetischen Folgerungen aus dieser Gleichung kann man entsprechende Folgerungen über die a, b, c, d ziehen.

Wenn von den vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ drei beliebig gegeben sind, so ist die vierte eindeutig bestimmt. Daraus folgt, da nach unserer Voraussetzung zu jeder Maßzahl eine bestimmte meßbare Größe gehört:

Wenn von den vier Gliedern einer Proportion drei beliebig gegeben sind, so ist das vierte dadurch eindeutig bestimmt.

2. Aus (3) ergeben sich nach den Regeln der Arithmetik die Gleichungen:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta},$$

und demnach ergeben sich aus der Proportion (1) die folgenden Proportionen:

$$\begin{gathered}(a+b) : b = (c+d) : d, \\ (a-b) : b = (c-d) : d, \\ (a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d).\end{gathered} \tag{4}$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß $a-b$ und folglich auch $c-d$ positiv sind.

3. Aus (3) folgt $\alpha/\gamma = \beta/\delta$. Hieraus aber läßt sich nur dann ein Schluß über die a, b, c, d ziehen, wenn a und c ein Verhältnis zu einander haben, d. h. wenn die vier Elemente a, b, c, d *derselben Menge* angehören. Unter dieser Voraussetzung aber ergibt sich:

Die Proportion

$$a : b = c : d \tag{5}$$

hat die Proportion

$$a : c = b : d \tag{6}$$

zur Folge.

4. *Mittlere Proportionale.*

Wenn in der Proportion (1) die zweite und die dritte Proportionale einander gleich sind, so nennt man sie die *mittlere Proportionale* zwischen dem ersten und vierten Gliede. Kann man,

wenn a, b beliebig gegeben sind, ihre mittlere Proportionale immer bestimmen? Kann man also ein Element x finden, das der Proportion

$$a : x = x : b \tag{7}$$

genügt? Selbstverständlich ist das nur möglich, wenn a und b derselben Menge angehören. Dann aber ergibt sich, wenn α, β, ξ die Maßzahlen von a, b, x sind, aus (7)

$$\frac{\alpha}{\xi} = \frac{\xi}{\beta}, \quad \xi^2 = \alpha\beta.$$

Man setze also $\xi = \sqrt{\alpha\beta}$, wodurch die Zahlenproportion

$$\alpha : \xi = \xi : \beta \tag{7'}$$

befriedigt ist. Hieraus aber folgt (7). Die Bestimmung der mittleren Proportionale führt also auf eine Quadratwurzel.

Wenn a und b Längen sind, so ist die mittlere Proportionale die Seite eines Quadrates, das dem aus den Seiten a und b konstruierten Rechteck flächengleich ist.

5. Diese Aufgabe läßt sich folgendermaßen erweitern: Es sollen die beiden Größen x, y so bestimmt werden, daß

$$a : x = x : y = y : b. \tag{8}$$

Nennen wir die Maßzahlen α, ξ, η, β, so ergibt sich

$$\alpha : \xi = \xi : \eta = \eta : \beta, \tag{9}$$

und aus dieser Proportion folgt

$$\alpha\eta = \xi^2, \quad \beta\xi = \eta^2, \quad \alpha\beta = \xi\eta, \tag{10}$$

also

$$\alpha^2\beta = \xi^3, \quad \alpha\beta^2 = \eta^3; \tag{11}$$

man hat also

$$\xi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}, \quad \eta = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}, \tag{12}$$

und hierdurch ist die Proportion (9) und folglich auch (8) erfüllt. Es ist aber $\alpha^2\beta$ die Maßzahl für den körperlichen Inhalt einer quadratischen Säule, deren Grundfläche ein Quadrat von der Seite a und deren Höhe b ist, und ξ ist die Maßzahl für die Seite eines Würfels, dessen Kubikinhalt $\alpha^2\beta$ ist. Es löst uns also diese Proportion die Aufgabe, eine quadratische Säule in einen inhaltsgleichen Würfel zu verwandeln und durch Kombination mit der Aufgabe 4. erhalten wir dann die Verwandlung eines beliebigen Parallelepipedons in einen Würfel.

Die Annahme $b = 2a$ führt auf das berühmte Delische Problem der Würfelverdoppelung[1]).

1) Die Delier sollen, als eine Krankheit bei ihnen wütete, durch das Orakel

6. Der goldene Schnitt. Es soll eine gegebene Strecke a so in zwei Teile x und $a - x$ geteilt werden, daß der kleinere Teil $a - x$ sich zum größeren x so verhält, wie der größere Teil zu der ganzen Strecke. Es soll also die Proportion

$$a - x : x = x : a, \tag{13}$$

oder, wenn α, ξ die Maßzahlen von a und x sind, die Gleichung $\xi^2 = \alpha(\alpha - \xi)$ oder:

$$\xi(\xi + \alpha) = \alpha^2$$

bestehen. Schreibt man dies so:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha^2,$$

so folgt nach der Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\alpha^2$$

und daraus

$$\xi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}\,\alpha}{2}. \tag{14}$$ [1]

Bei der Wahl der Beispiele dieses Abschnittes haben wir zum Teil Begriffe und Sätze benutzt, die erst in den späteren Abschnitten über Geometrie und Mechanik genauer erörtert werden solleu.

---

angewiesen worden sein, einen Altar des Apollo, der Würfelgestalt hatte, zu verdoppeln. Eine geometrische Lösung des Problems wird Plato zugeschrieben. Näheres über die Sage und die Geschichte des Problems s. Cantor, Bd. I.

1) Der „goldene Schnitt“, wie ihn eine spätere Zeit genannt hat, hatte bei den Pythagoräern eine mystische Bedeutung. In der griechischen Baukunst soll er als dem Auge besonders wohlgefälliges Verhältnis vielfache Verwendung gefunden haben. Eingehend ist die ästhetische Bedeutung des goldenen Schnittes in dem unter Lionardo da Vincis Einfluß und Mitwirkung entstandenen Werke „Divina Proportione“ von Luca Paciuolo (1509) behandelt.

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

§ 32. Wurzeln.

1. Ist p eine natürliche Zahl und a eine beliebige positive Zahl, so gibt es eine und nur eine positive Zahl x, die der Bedingung

$$x^p = a$$

genügt.

Daß es nicht mehr als eine solche Zahl geben kann, ist eine Folge des Satzes von den Potenzen, daß x^p mit x zugleich wächst. Es kann also, wenn x von y verschieden ist, nicht $x^p = y^p$ sein.

Um die Existenz einer Zahl x nachzuweisen, bilden wir einen Schnitt X/X', indem wir alle Zahlen, deren p^{te} Potenz kleiner als a oder gleich a ist, zu X, die deren p^{te} Potenz größer als a ist, zu X' rechnen. Es sind dann alle Zahlen in X oder in X' untergebracht, und wenn x die durch diesen Schnitt erzeugte Zahl ist, so ist $x^p = a$.

Denn wäre $x^p < a$, so müßte es nach dem Satze von der Stetigkeit (§ 24, 5.) auch Zahlen in X' geben, deren p^{te} Potenz kleiner als a wäre, was der Definition von X' widerspricht, und aus dem gleichen Grunde kann auch nicht $x^p > a$ sein.

Die so bestimmte Zahl x heißt die p^{te} Wurzel aus a, und man bezeichnet sie auch so:

$$x = \sqrt[p]{a};$$

p heißt der Wurzelexponent oder auch der Grad der Wurzel. Die Zahl a, die auch selbst eine irrationale Zahl sein kann, heißt der Radikand. Der Fall $p = 1$ bietet kein Interesse, da in diesem Falle $x = a$ wäre. Die zweite Wurzel, die am häufigsten vorkommt, heißt auch die Quadratwurzel, und bei dieser wird der Wurzelexponent 2 oft weggelassen, so daß $\sqrt{a}$ soviel bedeutet wie $\sqrt[2]{a}$ (wie in § 21).

Die dritte Wurzel wird Kubikwurzel genannt. Allgemein heißen die Zahlen $\sqrt[p]{a}$ auch Radikale.

2. Für das Rechnen mit Radikalen gelten die beiden Formeln

$$\sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}, \quad \sqrt[p]{a}\,/\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a/b},$$

oder in Worten ausgesprochen:

Um zwei Radikale gleichen Grades p zu multiplizieren oder zu dividieren, multipliziert oder dividiert man die Radikanden und nimmt die p^{te} Wurzel aus dem Produkt oder dem Quotienten.

Es ergibt sich dies einfach aus dem kommutativen Gesetz der Multiplikation, wonach $\left(\sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = ab$ ist.

Für die Addition und Subtraktion gibt es keine so einfachen Regeln.

Über die Größenbeziehungen der Wurzeln gelten die folgenden Sätze:

3. Ist $a > b$, so ist $\sqrt[p]{a} > \sqrt[p]{b}$ oder in Worten: Eine Wurzel wächst mit dem Radikanden.

Denn wäre $\sqrt[p]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[p]{b}$, so wäre auch $\sqrt[p]{a}^p \overline{\overline{<}} \sqrt[p]{b}^p$, d. h. $a \overline{\overline{<}} b$.

Die $\sqrt[p]{1}$ ist gleich 1, folglich, wenn $a > 1$ ist, auch $\sqrt[p]{a} > 1$.

4. Ist $a > 1$ und $p > q$, so ist

$$\sqrt[p]{a} < \sqrt[q]{a},$$

d. h.: Ist der Radikand größer als 1, so ist auch die Wurzel größer als 1, nimmt aber mit wachsendem Wurzelexponenten ab.

5. Ist $a < 1$ und $p > q$, so ist $1 > \sqrt[p]{a} > \sqrt[q]{a}$, d. h.: Ist der Radikand kleiner als 1, so ist auch die Wurzel kleiner als 1, nimmt aber mit wachsendem Wurzelexponenten zu.

Diese drei letzten Sätze fassen wir dann in den einen noch genaueren zusammen:

6. Ist a ein beliebiger positiver Radikand und sind c_1, c_2 irgend zwei Zahlen, die der Formel

$$c_1 < 1 < c_2$$

genügen, so ist immer

$$c_1 < \sqrt[p]{a} < c_2,$$

wenn p eine gewisse (von a, c_1, c_2 abhängige) Grenze überschritten hat.

Alle diese Sätze sind leicht aus § 18 zu beweisen. Es ist nämlich, wenn a und folglich nach 3. auch $\sqrt[q]{a}$ größer als 1 und $p > q$ ist, $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$, d. h. $a > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ und folglich $\sqrt[q]{a} > \sqrt[p]{a}$, wie der Satz 4. behauptet, und dies braucht man nur auf den reziproken Wert von a anzuwenden, um den Satz 5. zu erhalten.

Nun ist aber, wenn c_1 kleiner und c_2 größer als 1 ist, nach § 18, 8. für jeden hinlänglich großen Exponenten p, was auch a sein mag,

$$c_1^p < a < c_2^p,$$

und daraus ergibt sich 6. nach 3.

§ 33. Allgemeine Theorie der Potenzen.

1. Der Nachweis der Existenz der Wurzeln eröffnet uns nun den Weg, die Potenzen, die wir in § 18 für positive und negative ganzzahlige Exponenten erklärt haben, auch für gebrochene und selbst irrationale Exponenten zu definieren.

Es war eine aus dem Begriff der Potenz abgeleitete Formel

$$(1)\qquad (\alpha^m)^n = \alpha^{mn},$$

und es war immer

$$(2)\qquad \alpha^{-m} = 1 : \alpha^m, \quad \alpha^0 = 1,$$

worin m und n positive oder negative ganze Zahlen sein konnten, und α ebenfalls eine beliebige Zahl war, die wir jetzt, um anzudeuten, daß sie auch irrational sein kann, mit griechischem Buchstaben bezeichnen.

Es fragt sich nun, was sollen wir unter α^μ verstehen, wenn μ eine gebrochene Zahl, $\mu = p/q$ ist?

Wollen wir hierbei große Komplikationen vermeiden, so müssen wir zunächst an der Voraussetzung festhalten, daß die Basis α eine positive Zahl sei. Die Formel (1) gibt uns dann Antwort auf unsere Frage. Setzen wir nämlich darin $m = \mu = p/q$, $n = q$, so gibt diese Formel

$$(3)\qquad (\alpha^\mu)^q = \alpha^p,$$

und es ist also

$$(4)\qquad \alpha^{p/q} = \sqrt[q]{\alpha^p} = \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^p,$$

und wenn die Formel (3) auch für negative μ gültig bleiben soll, so ergibt sich, indem man p in $-p$ verwandelt,

$$(5)\qquad \alpha^\mu = 1 : \alpha^{-\mu}.$$

Nach dieser Definition ist für jeden Exponenten μ

(6) $$1^\mu = 1.$$

Wir haben nun für die verallgemeinerten Potenzen die folgenden Sätze:

2. Es ist

(7) $$\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^\mu \alpha^\nu,$$

(8) $$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}.$$

Setzen wir

$$\mu = \frac{m}{p}, \quad \nu = \frac{n}{q},$$

so ist, wenn p, q positiv angenommen werden,

$$(\alpha^{\mu+\nu})^{pq} = \alpha^{mq+np} = \alpha^{mq}\alpha^{np},$$

und folglich, indem man die pq^{te} Wurzel zieht,

$$\alpha^{\mu+\nu} = \sqrt[pq]{\alpha^{mq}\alpha^{np}} = \alpha^\mu \alpha^\nu.$$

Dadurch ist (7) bewiesen. Ebenso ist

$$((\alpha^\mu)^\nu)^q = (\alpha^\mu)^n = \alpha^{n\mu} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}}$$

und

$$(\alpha^{\mu\nu})^q = (\alpha^\mu)^n = \sqrt[p]{\alpha^{mn}},$$

und hieraus ergibt sich, indem man die q^{te} Wurzel zieht, die Formel (8).

3. Ist $\alpha > 1$ und $\mu > \nu$, so ist

(9) $$\alpha^\mu > \alpha^\nu.$$

Denn es ist

$$(\alpha^\mu)^{pq} = \alpha^{mq}, \quad (\alpha^\nu)^{pq} = \alpha^{np},$$

und wenn $\mu > \nu$ ist, so ist $mq > np$, folglich

$$(\alpha^\mu)^{pq} > (\alpha^\nu)^{pq},$$

und daraus die Formel (9).

4. Ist $\alpha > 1$ und c irgend eine Zahl, die der Bedingung $1 < c$ genügt, so ist für jedes positive μ, was unter einer hinlänglich kleinen Zahl μ_0 liegt,

(10) $$1 < \alpha^\mu < c.$$

Bestimmen wir nämlich p so, daß $c^p > \alpha$ ist, so ist $c > \alpha^{1/p} > \alpha^\mu$, wenn $\mu < 1/p$ ist. Die Umgleichung (10) ist also befriedigt für jedes μ, was der Bedingung

$$0 < \mu < \frac{1}{p}$$

genügt.

In dem Falle, daß $\alpha < 1$ ist, gelten die Formeln, die man aus (9) und (10) durch Vertauschung des Zeichens $<$ mit $>$ erhält.

5. Ist $\alpha > 1$ und sind a, a' untere und obere Näherungswerte von α, sind ferner c_1 und c_2 zwei der Bedingung

$$c_1 < \alpha^\mu < c_2 \tag{11}$$

genügende Zahlen, so ist, wenn $a' - a$ hinlänglich klein ist,

$$c_1 < a^\mu < a'^\mu < c_2. \tag{12}$$

Man hat nämlich, um dies zu erreichen, a und a' nur so anzunehmen, daß

$$c_1^{1/\mu} < a < \alpha < a' < c_2^{1/\mu}$$

wird.

6. Nun läßt sich auch leicht eine Potenz mit irrationalem Exponenten erklären. Es sei ξ also eine Irrationalzahl, die durch den Schnitt X/X' erzeugt wird, und x, x' seien die Zahlen aus X, X'. Es sei ferner α eine positive Zahl, die wir größer als 1 voraussetzen wollen. Es ist dann immer $x < x'$ und folglich

$$\alpha^x < \alpha^{x'}. \tag{13}$$

Daraus folgt, daß die Zahlenmengen α^x eine obere, $\alpha^{x'}$ eine untere Grenze haben und diese beiden Grenzen können nicht verschieden sein. Bezeichnen wir nämlich diese Grenzen mit β und β', so kann β' nicht kleiner als β sein. Denn es gibt immer Zahlen x, für die α^x der Grenze β, und Zahlen x', für die $\alpha^{x'}$ der Grenze β' beliebig nahe kommt. Wäre also $\beta > \beta'$, so könnte man x, x' so annehmen, daß $\alpha^x > \alpha^{x'}$ wäre, was der Formel (13) widerspricht.

Wäre aber $\beta < \beta'$, also β'/β ein unechter Bruch, so wäre

$$1 < \beta'/\beta < \alpha^{x'-x},$$

wie auch x, x' gewählt sind. Das aber ist nach 4. unmöglich, da $x' - x$ beliebig klein werden kann.

Wir verstehen also unter

$$\beta = \alpha^\xi$$

die gemeinsame Grenze von α^x, $\alpha^{x'}$ und haben damit die Potenz für jeden irrationalen Exponenten erklärt.

7. Nach dieser Definition können wir den Satz beweisen: Ist $\beta = \alpha^\xi$ und b eine Zahl, die man aus β erhält, wenn man α und ξ durch Näherungswerte a, a', x, x' ersetzt; sind endlich c_1, c_2 irgend zwei Zahlen, die der Bedingung

$$c_1 < \alpha^\xi < c_2$$

genügen, so ist auch

$$c_1 < b < c_2,$$

wenn $x' - x$ und $a' - a$ hinlänglich klein sind.

Zunächst ist nämlich, nach dem Begriff der Grenze,

$$c_1 < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < c_2,$$

sobald $x' - x$ unter eine hinlänglich kleine Zahl heruntergesunken ist. Dann aber kann man nach Nr. 5 $a' - a$ noch so klein annehmen, daß

$$c_1 < a^x < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < a'^{x'} < c_2,$$

und hierin ist der Beweis des Satzes enthalten.

8. Hiernach läßt sich der Fundamentalsatz von der Stetigkeit (§ 24, 5.) dahin erweitern, daß in der Rechenvorschrift $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ auch Potenzen von positiver Basis mit irrationalen Exponenten vorkommen dürfen, und hieraus folgt weiter, daß alle Sätze, die wir über Potenzen mit rationalen Exponenten kennen gelernt haben, auch für irrationale Exponenten richtig bleiben.

§ 34. Logarithmen.

1. Nach dem, was wir im vorigen Paragraphen bewiesen haben, läßt sich, wenn a eine positive und x eine beliebige Zahl ist, die positive Zahl y durch die Gleichung

$$y = a^x$$

eindeutig definieren. Ebenso läßt sich, wenn x und die positive Zahl y gegeben sind, a durch

$$a = y^{1/x}$$

eindeutig bestimmen. Naturgemäß erweitert sich die Aufgabe nun durch die folgende Frage:

16. Wenn a und y gegebene positive Zahlen sind, wie findet man x? Oder in Worten: Zu welcher Potenz muß man die positive Zahl a erheben, um die gegebene positive Zahl y zu erhalten?

Diese Zahl x wird der Logarithmus von y für die Basis a genannt und man schreibt:

$$x = \overset{a}{\log}\, y.$$

So ist 2 der Logarithmus von 4 für die Basis 2, 6 der Logarithmus von 64 für die Basis 2, 3 der Logarithmus von 1000 für die Basis

10 u. s. f. Der Logarithmus von 1 für jede Basis ist Null, weil a^0 immer gleich 1 ist.

Da auch 1^x für jedes x gleich 1 ist, so hat nur die Zahl 1 einen Logarithmus für die Basis 1 und dieser ist vollständig unbestimmt. Die Basis 1 ist daher für praktische Zwecke nicht verwendbar. Wir nehmen, was an sich nicht nötig wäre, die Basis immer größer als 1 an. Da unter dieser Voraussetzung a^x für positive x größer, für negative x kleiner als 1 ist, und da überdies $a^{-x} = 1/a^x$ ist, so folgt, daß unechte Brüche positive, echte Brüche negative Logarithmen haben, und daß zwei zueinander reziproke Zahlen y und $1/y$ entgegengesetzt gleiche Logarithmen haben.

2. Daß für gegebene y und a immer ein Logarithmus existiert, können wir wieder mit Hilfe des Schnittes nachweisen. Wir vereinigen alle Zahlen x, für die $a^x < y$ ist, in ein System X, und die Zahlen x', für die $a^{x'} > y$, in ein System X'. Dann ist jedes x' größer als jedes x, und wir haben einen Schnitt X/X', der eine Zahl ξ definiert. Wäre nun a^ξ größer als y, so müßte es ein x geben, für das $y < a^x < a^\xi$ wäre, was der Definition des x widerspricht, und ebenso kann a^ξ nicht kleiner als y sein, und muß folglich gleich y sein.

Es hat daher jede positive Zahl y für eine von 1 verschiedene positive Basis einen und nur einen Logarithmus.

3. Die Grundformeln für die Rechnung mit Logarithmen ergeben sich aus den entsprechenden Formeln für die Potenzen. Diese setzen wir in die Form:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}, \quad a^{\mu x} = (a^x)^\mu,$$

worin x, x_1, x_2, μ beliebige positive oder negative rationale oder irrationale Zahlen bedeuten können. Setzen wir also

$$a^x = y, \quad a^{x_1} = y_1, \quad a^{x_2} = y_2,$$

so können auch y, y_1, y_2 beliebige, aber nur positive Zahlen sein, und wir haben

$$x = \log y, \quad x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2,$$

worin der Einfachheit halber die Basis a, die immer dieselbe bleibt, in die Bezeichnung nicht mit aufgenommen ist. Daraus ergibt sich dann

$$x_1 + x_2 = \log y_1 y_2, \quad x_1 - x_2 = \log \frac{y_1}{y_2}, \quad \mu x = \log (y^\mu),$$

oder für beliebige positive Zahlen y, y_1, y_2 und ein beliebiges positives oder negatives μ:

$$\log y_1 + \log y_2 = \log y_1 y_2,$$

$$\log y_1 - \log y_2 = \log \frac{y_1}{y_2},$$

$$\mu \log y = \log (y^\mu).$$

In Worten lassen sich diese Formeln so ausdrücken:

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz des Logarithmus des Dividenden und des Logarithmus des Divisors.

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus der Basis.

4. Sind a und b zwei positive Zahlen, so ist nach der Definition des Logarithmus

$$a = b^{\overset{b}{\log} a},$$

folglich, wenn x beliebig, y positiv ist:

$$a^x = b^{x \overset{b}{\log} a} = y$$

oder

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad x \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} y$$

also:

$$\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log} a \overset{a}{\log} y.$$

Diese Formel vermittelt den Übergang von einer Basis a zu einer andern Basis b.

Multipliziert man die Logarithmen aller positiven Zahlen für die Basis a mit einem und demselben Faktor $\overset{b}{\log} a$, so erhält man die Logarithmen derselben Zahlen für die Basis b.

5. Wenn $y = a^x$, also x der Logarithmus von y ist, so wird y auch der Numerus (Zahl) von x (für die Basis a) genannt, so daß jede der beiden Gleichungen

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad y = \overset{a}{\text{num}}\, x$$

aus der andern folgt. Die Basis a wird, wenn sie sich aus dem Zusammenhang klar ergibt, bisweilen bei der Bezeichnung weggelassen.

§ 35. Die Neperschen Logarithmen.

1. Die Einführung der Logarithmen ist durch die außerordentliche Erleichterung, die sie dem praktischen Rechner gewähren, für

die Entwicklung der Wissenschaft, im besonderen der messenden Naturwissenschaften von dem allergrößten Nutzen gewesen, den man vielleicht nur mit dem Gewinn vergleichen kann, den uns die Einführung des dekadischen Ziffernsystems gebracht hat.

Historisch hat sich der Begriff aber nicht aus einer systematischen Erweiterung der Potenzen und deren Umkehrung entwickelt, sondern, was freilich im Prinzip auf dasselbe hinauskommt, aus der Vergleichung einer arithmetischen mit einer geometrischen Progression.

Unter einer arithmetischen Progression versteht man eine Aufeinanderfolge von Zahlen, in der jede folgende Zahl aus der vorangegangenen durch Hinzufügung einer und derselben Zahl, die die Differenz der arithmetischen Progression genannt wird, entsteht. Eine geometrische Progression ist eine Zahlenfolge, in der jedes folgende Glied aus dem vorangegangenen durch Multiplikation mit einem und demselben Faktor, dem Quotienten der geometrischen Progression, entsteht.

2. Betrachten wir z. B. die folgende kleine Tabelle, bei der in der ersten Reihe die natürlichen Zahlen stehen, die eine arithmetische Progression bilden, während die entsprechenden Stellen der zweiten Reihe durch die aufeinander folgenden Potenzen von 2, die eine geometrische Progression bilden, ausgefüllt sind:

(1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

,

so haben wir hier eine Logarithmentafel mit der Basis 2. In der ersten Zeile steht der Logarithmus der darunter stehenden Zahl. Man kann diese z. B. so verwenden: Um das Produkt $8 \cdot 64$ zu finden, addiere man die Logarithmen 3 und 6 von 8 und 64 und erhält 9, wozu der Numerus 512 gehört.

Diese Tafel kann man auch nach der linken Seite hin fortsetzen:

(2)

-4	-3	-2	-1	0	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

,

und nun hätte man, wenn man etwa $\frac{1}{8} \cdot 512$ berechnen wollte, $9 - 3 = 6$ als Logarithmus von 64 zu suchen, und erhält so das richtige Resultat.

Eine solche Tafel nebst Andeutungen über ihren Nutzen findet sich zuerst in der „Arithmetica integra“ von Michael Stifel um 1544.

3. In dieser Form ist aber die Logarithmentafel nur von beschränkter Anwendbarkeit, da man nur die Logarithmen gewisser

Zahlen, die in großen und zwar immer wachsenden Intervallen aufeinander folgen, daraus finden kanu.

Diesem Übelstande suchte John Neper, wie schon vor ihm Joost Bürgi, dadurch zu begegnen, daß er die Differenz der arithmetischen Progression verkleinert und zugleich den Quotienten der geometrischen Progression nahe an 1 nimmt. Dadurch erreicht man, daß eine innerhalb gewisser Grenzen beliebig gegebene Zahl, wenn auch nicht genau, so doch mit großer Annäherung, in der arithmetischen und in der geometrischen Progression vorkommt[1]).

Bezeichnet Δ eine kleine Größe, so lasse man die Zahlen der arithmetischen und geometrischen Progression in folgender Weise einander entsprechen:

$$(3)\quad \begin{array}{llllll} 0, & \Delta\ , & 2\Delta\ , & 3\Delta\ , & 4\Delta\ , & 5\Delta\ , \cdots, \\ 1, & 1+\Delta, & (1+\Delta)^2, & (1+\Delta)^3, & (1+\Delta)^4, & (1+\Delta)^5, \cdots. \end{array}$$

Jede positive Zahl liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern der ersten Reihe und ist also in dieser Reihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{2}\Delta$ enthalten, und jede Zahl die größer ist als 1, ist zwischen zwei Zahlen der zweiten Reihe gelegen, also etwa zwischen $(1+\Delta)^n$ und $(1+\Delta)^{n+1}$ und das Maximum des Fehlers ist hier also $\frac{1}{2}\Delta(1+\Delta)^n$, wird also um so größer, je größer die Zahl selbst ist.

Um zwei Zahlen der zweiten Reihe

$$a = (1+\Delta)^m, \quad b = (1+\Delta)^n$$

zu multiplizieren, addiert man die entsprechenden Zahlen der ersten Reihe

$$\alpha = m\Delta, \quad \beta = n\Delta$$

und sucht die der Summe $\alpha + \beta = (m+n)\Delta$ entsprechende Zahl $ab = (1+\Delta)^{m+n}$ der zweiten Reihe auf.

Man kann auch statt der steigenden eine fallende geometrische Progression berechnen $1, 1-\Delta, (1-\Delta)^2, (1-\Delta)^3, \ldots,$ erhält aber dann nur Zahlen, die kleiner als 1 sind[2]).

---

1) Joost Bürgi, 1552—1632 oder 1633, ein geborener Schweizer, der in den Diensten des Landgrafen Wilhelm IV. in Kassel und später in Prag lebte, hat schon in den Jahren zwischen 1603 und 1611 unter dem Namen „Progress tabulen" eine solche Tafel berechnet, die er aber geheim hielt, wodurch er sich um den Ruhm des ersten Entdeckers brachte. Nepers erstes Werk erschien 1614. Neper braucht zuerst den Namen „Logarithmen" (Descriptio mirifici logarithmorum canonis). Nach dem damaligen Stand der Wissenschaft gehörten zur Konstruktion solcher Tafeln ungeheure Rechnungen.

2) So hat Neper seine Tafel in der Tat angeordnet, die zunächst auf trigonometrische Größen, die kleiner als 1 sind, angewandt werden sollte.

4. Setzt man

$$a = (1 + \Delta)^m, \quad \alpha = m\Delta,$$

so ist

$$a = (1 + \Delta)^{\frac{\alpha}{\Delta}}$$

und α der Logarithmus von a für die Basis

$$E = (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}}.$$

Die Tabelle (3) ist also eine Logarithmentafel für diese Basis.

Neper legt die Zahl

$$\Delta = 0{,}0000001$$

zu Grunde und erhält also:

$$E = (1{,}0000001)^{10000000}.$$

Nach der Neperschen Tafel ergibt sich für diese Basis der Logarithmus von 2 gleich 0,693146922, während nach neueren Tafeln der sogenannte natürliche Logarithmus von 2, d. h. der Logarithmus von 2 für die Basis

$$e = 2{,}71828182846$$

sich fast genau ebenso, nämlich 0,693147180 ergibt. Die Basis der Neperschen Logarithmen stimmt also sehr nahe mit der Zahl e überein.

§ 36. Briggische Logarithmen.

1. Man kann noch auf eine andere Weise zwei aufeinander bezogene Zahlenreihen einer arithmetischen und geometrischen Progression ergänzen. Hat man für eine beliebige Basis die Logarithmen zweier Zahlen:

$$x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2, \tag{1}$$

so folgt nach § 34

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \log \sqrt{y_1 y_2}. \tag{2}$$

Die Zahl $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ nennt man das arithmetische Mittel der beiden Zahlen x_1, x_2, und $\sqrt{y_1 y_2}$ das geometrische Mittel der (positiven) Zahlen y_1, y_2, so daß wir den Inhalt der Formel (2) auch so aussprechen können:

Das arithmetische Mittel der Logarithmen zweier Zahlen ist der Logarithmus des geometrischen Mittels der beiden Zahlen.

Ist $x_1 < x_2$, so ist auch $y_1 < y_2$ und es ist zugleich

$$x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2,$$
$$y_1 < \sqrt{y_1 y_2} < y_2.$$

Man kann daher durch bloses Quadratwurzelziehen, wenn eine Reihe von Logarithmen bekannt ist, die Logarithmen von beliebig vielen zwischenliegenden Zahlen berechnen und so eine immer dichtere Logarithmentafel konstruieren. Dies ist in der Tat der Weg, auf dem die ersten Logarithmentafeln berechnet sind.

Nehmen wir beispielsweise die Tafel (1), (2), § 35, so ergibt sich für die Basis 2:

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= \log \sqrt{2} = \log 1{,}41421, \\ 1{,}5 &= \log \sqrt{8} = \log 2{,}82842, \\ 0{,}25 &= \log \sqrt[4]{2} = \log 1{,}18920. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man eine Logarithmentafel für eine beliebige Zahl als Basis konstruieren und es war zuerst Henry Briggs, ein Zeitgenosse und Freund Nepers, der die großen Vorzüge der Basis 10 erkannt und eine Tafel dafür berechnet hat (gedruckt 1617 und 1624). Daher werden diese Logarithmen auch die Briggschen Logarithmen genannt. Der Vorzug dieser Basis besteht aber in folgendem:

Wenn eine im dekadischen Ziffernsystem dargestellte Zahl, sei es eine ganze Zahl oder ein Dezimalbruch, mit m Ziffern (vor dem Komma) geschrieben wird, so liegt sie ihrer Größe nach zwischen 10^{m-1} und 10^m und folglich liegt ihr Briggischer Logarithmus zwischen $m - 1$ und m (die untere Grenze $m - 1$ eingeschlossen).

Man kann also sofort die Ganzen des Logarithmus, d. h. die Zahl vor dem Komma angeben, indem man die Stellenzahl des Numerus vor dem Komma um 1 vermindert. Diese Zahl heißt die Charakteristik oder auch die Kennzahl und ist in den gebräuchlichen Tafeln nicht mit angegeben. Die nach dem Komma folgenden Dezimalstellen werden die Mantisse des Logarithmus genannt. Diese findet man in den Tafeln allein angegeben. Wenn man umgekehrt aus der Tafel zu einem gegebenen Logarithmus den Numerus ermitteln will, so sucht man die Mantisse in der Tafel auf und erhält eine zugehörige Zahl, von der man eine Stelle mehr vor das Komma zu setzen hat, als die Charakteristik angibt. Zahlen, die kleiner als 1 sind, also Zahlen, die, dekadisch geschrieben, nur eine Null vor dem Komma haben, haben negative Logarithmen. Um aber nur mit positiven Zahlen zu rechnen, nimmt man die Mantisse immer positiv und nur die Kennziffer negativ, d. h. man multipliziert eine solche echt gebrochene Zahl mit einer geeigneten Potenz von 10 und

hat dann von der als Logarithmus gefundenen Zahl den Exponenten dieser Potenz von 10 zu subtrahieren.

Es ist also z. B.

$$\begin{aligned}\text{log brigg. } 1/3 &= -\log 3 = -0{,}4771212547\,,\\ &= \qquad\qquad 0{,}5228787453-1\,,\\ \text{log brigg. } 0{,}003657 &= 0{,}5631249603-3.\end{aligned}$$

Die Tafeln von Briggs sind 1617 und 1624 im Druck erschienen. Sie gaben die Logarithmen auf 14 Dezimalstellen, enthielten aber noch eine große Lücke. Diese ist in den 10stelligen Tafeln von Adrian Vlack ausgefüllt (1628). Die Tafel von Vlack enthält auf 10 Stellen die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000.

Man hat im praktischen Gebrauch erkannt, daß für die meisten Anwendungen der Logarithmen der Gebrauch 10stelliger Tafeln nicht notwendig ist, und so sind die siebenstelligen Tafeln die verbreitetsten geworden. Solche Tafeln sind von Vega (1793) herausgegeben und seitdem, später in der Bearbeitung von Hülsse, in sehr vielen Auflagen verbreitet. Später hat man gefunden, daß für viele Zwecke, besonders auch in der blos die Übung bezweckenden Anwendung im Schulunterricht, aber auch in naturwissenschaftlichen Anwendungen, die keine große Genauigkeit gestatten, selbst sieben Stellen noch zu viel und zu unhandlich sind, und hat Tafeln mit 6, mit 5 und selbst mit 4 Stellen konstruiert. Unter den zahlreichen Werken dieser Art, die zum Teil auch Erleichterung des Gebrauches durch die innere Anordnung und den Druck zu erreichen suchen, mögen hier erwähnt sein die Tafeln von Schrön, Bremiker, Wittstein, Greve, F. G. Gauß, Heyer, Schülke.

Es kommen aber, nicht bloß in den Naturwissenschaften, besonders der Astronomie, sondern auch in zahlentheoretischen Untersuchungen Fälle vor, in denen selbst die siebenstelligen Tafeln nicht ausreichen, und es ist darum für den Mathematiker notwendig, sich auch einige Übung in dem Gebrauch größerer Tafeln zu erwerben. Unter diesen ist wohl die wertvollste und verhältnismäßig leicht zugänglich der „Thesaurus logarithmorum“ von Vega, der 1794 in Leipzig erschienen ist, der eine vollständige 10stellige Tafel der Briggschen Logarithmen, außerdem aber die Tafeln von Wolfram enthält, in denen die natürlichen Logarithmen der Zahlen bis zu 10009 auf 48 Dezimalstellen gegeben sind.

Da man jede Zahl als Produkt aus Primzahlen darstellen kann, so läßt sich jeder Logarithmus durch Addition von Logarithmen von Primzahlen finden, und wenn man daher die Zerlegung der Zahlen in ihre Primfaktoren als bekannt voraussetzen darf, so genügt eine

Tafel, in der nur die Logarithmen der Primzahlen verzeichnet sind. Von dieser Vereinfachung, die freilich den Gebrauch erschwert, ist in dem späteren Teil der Wolframschen Tafel Gebrauch gemacht.

Da der „Thesaurus“ selten und teuer geworden war, ist im Jahr 1896 in Florenz eine photozinkographische Reproduktion erschienen, die nun zu billigerem Preise käuflich ist.

§ 37. Interpolation.

1. Jede der verbreiteten Logarithmentafeln gibt in der Einleitung eine Anweisung über den Gebrauch, und manche kleine Vorteile lernt man erst in der Anwendung und durch Übung kennen. Es ist nur ein Punkt von allgemeinerer Bedeutung, den wir hier etwas eingehender besprechen müssen, das ist die sogenannte Interpolation.

Die siebenstelligen Tafeln z. B. enthalten direkt die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen bis zu 99 999, also aller fünfstelligen Zahlen bis auf sieben Dezimalen.

Handelt es sich aber um die Auffindung des Logarithmus einer siebenstelligen Zahl, so findet man diesen aus der Tafel nur dann direkt, wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind. Von einer siebenstelligen Tafel kann man aber verlangen, daß man aus ihr die Logarithmen aller siebenstelligen Zahlen mit gleicher Genauigkeit finden könne.

Ebenso wird man einen gegebenen Logarithmus, zu dem der Numerus bestimmt werden soll, in der Regel nicht genau in der Tafel finden, und doch soll der Numerus wieder bis auf sieben Stellen genau ermittelt werden.

Dies geschieht nun mit Hilfe der Interpolation, die auf dem folgenden Gedanken beruht.

Es sei $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Reihe von Zahlen, die in arithmetischer Progression mit der Differenz D stehen:

$$x - x_1 = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \cdots = D,$$

und es sei

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &= \log x, \\ y_1 &= \log x_1, \quad y_1 - y = \Delta, \\ y_2 &= \log x_2, \quad y_2 - y_1 = \Delta_1, \\ y_3 &= \log x_3, \quad y_3 - y_2 = \Delta_2. \end{aligned}$$

Die Differenzen $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ sind nicht einander gleich, sondern sie nehmen, wie man aus den Tafeln ersieht, allmählich ab. Da diese Abnahme aber langsam geschieht, so kann man ohne merklichen

Fehler annehmen, daß auch die y innerhalb eines gewissen engen Intervalles in arithmetischer Progression stehen, was natürlich nicht genau richtig ist, aber bei der Einrichtung unserer siebenstelligen Tafeln niemals zu einem merklichen Fehler führt.

Soll dann der Logarithmus $y + \beta$ einer zwischen x und x_1 gelegenen Zahl $x + \alpha$ ermittelt werden, so ist α ein Bruchteil von D, und für β kann man unter dieser Voraussetzung den entsprechenden Bruchteil von Δ setzen, also

$$\beta = \frac{\Delta}{D}\alpha. \tag{2}$$

In den Tafeln sind zur Erleichterung der Rechnung unter der Überschrift P. P. (Partes proportionales, Proportionalteile) die Differenzen Δ und die Vielfachen

$$\frac{\Delta}{10}, \quad \frac{2\Delta}{10}, \ldots, \frac{9\Delta}{10}$$

angegeben mit der Genauigkeit, mit der sie in die Rechnung einzusetzen sind.

Aus denselben Tafeln findet man, wenn β gegeben ist, α nach der Formel

$$\alpha = \frac{D\beta}{\Delta}.$$

Man hat also hier noch eine kleine Division auszuführen, bei der man sich des abgekürzten Verfahrens bedienen oder auch die Hilfstafeln der Proportionalteile benutzen kann.

Da die Differenzen Δ am größten sind bei den kleineren Zahlen (von 10000 ab), so ist in diesen Teilen der Tafel die Interpolation am wenigsten genau, und darum gehen manche Tafeln noch ein Stück über die fünfstelligen Zahlen hinaus (z. B. Vega bis 107999) und geben für diese die Logarithmen auf acht Stellen.

2. In den zehnstelligen Tafeln des Thesaurus sind die Logarithmen aller fünfstelligen Zahlen direkt angegeben. Auch hier wird die Interpolation nach denselben Grundsätzen ausgeführt. Um aber diese Tafeln vollständig auszunutzen, genügt es bisweilen nicht ganz, die zwischenliegenden Logarithmen in arithmetischer Progression anzunehmen.

Man nimmt dann die Differenz $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ nicht konstant sondern in arithmetischer Progression an, und erhält für die Logarithmen y eine arithmetische Progression zweiter Ordnung.

Soll also nach dieser Annahme aus der Tafel der Logarithmus einer Zahl $y + \beta$ zwischen y und y_1 gefunden werden, so setze man

$$\beta = m\alpha + m'\alpha(D - \alpha)$$

und bestimme nun die Zahlen m und m' so, daß $y + \beta$ für x_1 und x_2,

d. h. für $\alpha = D$ und $\alpha = 2D$ die richtigen Werte $y_1 = y + \Delta$ und $y_2 = y + \Delta + \Delta_1$ geben. Daraus erhält man

$$m = \frac{\Delta}{D},$$

$$\Delta + \Delta_1 = 2mD - 2m'D^2,$$

$$2m'D^2 = \Delta - \Delta_1 = \Delta';$$

also findet man β aus

$$\beta = \frac{\Delta}{D}\alpha + \frac{\alpha(D-\alpha)\Delta'}{2D^2}. \tag{3}$$

Die Zahl $\Delta - \Delta_1 = \Delta'$ heißt die zweite Differenz. Ihr Einfluß ist meist nur in der letzten oder höchstens in den beiden letzten Dezimalen noch merklich.

Betrachten wir y als zehnstellige, x als fünfstellige ganze Zahl (ohne Dezimalstellen), so ist $D = 1$ und $\alpha = 0{,}abcde$ zu setzen, worin a, b, c, d, e die 6[te], 7[te], 8[te], 9[te], 10[te] Dezimalstelle der gegebenen Zahl $x + \alpha$ sind. Wegen der Kleinheit von Δ' in Vergleich zu Δ genügt es, wenn man in dem zweiten Gliede auf der rechten Seite der Formel (3) nur zwei Dezimalen von α berücksichtigt.

Ist also N die Zahl, deren Logarithmus gefunden werden soll, und n die aus den fünf ersten Ziffern von N gebildete Zahl, so findet man $\log n$ auf 10 Stellen genau in der Tafel, und man erhält dann aus (3)

$$\log N = \log n + 0{,}abcde\Delta + \tfrac{1}{2}\, 0{,}ab(1 - 0{,}ab)\Delta'. \tag{4}$$

In dieser Formel ist N so zu verstehen, daß die fünf Stellen n vor dem Komma stehen. Je nach der wirklichen Stellung des Komma hat man dann noch die Charakteristik beizufügen.

Wenn von der Zahl N mehr als 10 Ziffern bekannt sind, so kann man bei der Multiplikation im zweiten Gliede noch die elfte berücksichtigen.

Es soll z. B. der Briggische Logarithmus der Zahl e

$$e = 2{,}71828182846$$

auf zehn Stellen genau gefunden werden. Man findet in der Tafel die Logarithmen von fünf aufeinander folgenden Zahlen auf zehn Stellen:

	Δ	Δ'
log 27182 = 4342814081		
3 = 2973851	159770	
4 = 3133615	764	6
5 = 3293373	758	6
6 = 3453126	753	5

Man hat also nach der abgekürzten Multiplikation zu bilden:

$$0{,}8182846 \times 159770$$

und

$$\frac{1}{2}\, 0{,}82 \times 0{,}18 \times 6,$$

und erhält

$$\begin{array}{r} 4342814081 \\ 127816 \\ 1597\cdot 7 \\ 1278\cdot 16 \\ 31\cdot 95 \\ 12\cdot 78 \\ 64 \\ 9 \\ \hline 45 \\ \hline 0{,}4342944818\cdot 77, \end{array}$$

was bis auf 10 Dezimalen richtig ist. Die zweite Differenz gibt hier nur ungefähr eine halbe Einheit in der letzten Stelle, und wird also nur bei ganz scharfen Rechnungen in Betracht kommen. Die zweiten Differenzen sind um so größer, je kleiner die Zahlen sind, deren Logarithmen gesucht werden.

Die in der Tafel enthaltenen Nebentafeln, über deren Einrichtung und Gebrauch die Einleitung belehrt, haben den Zweck, die Multiplikationsrechnung zu vereinfachen.

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich zu einem gegebenen Logarithmus den zugehörigen Numerus zu finden, geschieht bei Berücksichtigung der ersten Differenz nach der Formel (2). Die Berücksichtigung der zweiten Differenz würde nach einer der Formel (3) analog gebildeten Formel möglich sein, erfordert aber bei der Einrichtung der Tafel einen größeren Aufwand von Rechnung.

Im allgemeinen wird die Berücksichtigung der zweiten Differenz um so eher nötiger sein, je größer die Intervalle der Zahlen sind, deren Logarithmen in der Tafel direkt gegeben sind. Man erhält z. B. eine vollständig ausreichende vierstellige Logarithmentafel, die auf einer halben Seite Platz hat, wenn man die Logarithmen aller zweistelligen Zahlen zusammenstellt. Mit einer solchen Tafel ist eine vierstellig genaue Rechnung möglich, aber in manchen Fällen nur mit Berücksichtigung der zweiten Differenzen.

§ 38. Anwendungen.

Es sollen hier noch einige Beispiele für logarithmische Rechnungen gegeben werden, in denen man, um das gewünschte Resultat zu erhalten, notwendig größere Tafeln benutzen muß. Es sei

$$e = 2{,}71828182846 \tag{1}$$

die Basis der natürlichen Logarithmen,

$$\pi = 3{,}14159265359 \tag{2}$$

die Ludolfische Zahl. Man findet dann auf 10 Stellen richtig

$$\log(\pi \log e) = 0{,}1349341840\,[1]. \tag{3}$$

Es ergibt sich aus theoretischen Betrachtungen, die hier nicht besprochen werden können[2], daß die Zahl

$$z = e^{\pi\sqrt{19}} \tag{4}$$

von einer ganzen Zahl um weniger als $\frac{1}{4}$ übertroffen wird. Welches ist diese ganze Zahl?

Man hat aus (4)

$$\log\log z = \log\sqrt{19} + \log(\pi \log e),$$

also wenn man aus der zehnstelligen Tafel

$$\log\sqrt{19} = 0{,}6393768005$$

entnimmt, nach (3)

$$\log\log z = 0{,}7743109845.$$

Man muß also zweimal nacheinander den Numerus aufsuchen und erhält

$$\log z = 5{,}94717865,$$

$$z = 885479{,}8.$$

Die gesuchte Zahl ist also

$$A = 885480.$$

Als Probe der Richtigkeit, die wir freilich hier auch nicht begründen können, dient, daß $A - 744$ eine Kubikzahl sein muß, und es ist in der Tat

$$A - 744 = 884736 = 96^3.$$

Es gibt noch einige andere Zahlen von ähnlicher Eigenschaft, nämlich

---

1) Die nötigen Angaben für die Berechnung dieser Zahl finden sich auf der letzten Seite der „Sammlung mathematischer Tafeln" von Vega, herausgegeben von Hülsse (Berlin 1865).

2) H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, S. 247, 355, 405. Braunschweig 1891.

$$z = e^{\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\pi\sqrt{163}},$$

deren Werte gewissen ganzen Zahlen A noch näher kommen, so daß z. B. die dritte mit 12 Ziffern 9 nach dem Komma beginnt. Für die erste dieser drei Zahlen erhält man bei genauester Benutzung des Thesaurus

$$A = 884736744.$$

Die beiden anderen Zahlen gehen aber weit über die Grenzen des Thesaurus hinaus. Man kann sie aber aus dem Umstand berechnen, daß auch

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}}$$

ganzen Zahlen B nahe kommen, wenn auch nicht in dem Maße wie die Zahlen z, und daß dann

$$A = B^3 + 744$$

wird.

Es ergibt sich z. B.

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}} = 960{,}000042$$

oder $B = 960$, und in den beiden anderen Fällen

$$B = 5280, \quad B = 640320.$$

Diese Beispiele beruhen auf tiefliegenden arithmetischen Eigenschaften, die den Zahlen 19, 43, 67, 163 und keinen anderen zukommen.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

§ 39. Gleichungen ersten Grades mit einer und mit zwei Unbekannten.

Wir haben in § 17 die Notwendigkeit der Einführung gebrochener Zahlen aus der Aufgabe abgeleitet:

1. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so soll eine Zahl x gefunden werden, die der Bedingung

$$ax = b \tag{1}$$

genügt,

und wir haben dort gesehen, daß es, wenn a und b in dem Gebiete der ganzen oder gebrochenen Zahlen enthalten sind, immer eine und nur eine Zahl gibt, die dieser Forderung genügt, ausgenommen wenn $a = 0$ ist. Ist dann b nicht $= 0$, so gibt es keine Zahl x, ist aber zugleich $b = 0$, so genügt jede beliebige Zahl, für x gesetzt, der Bedingung (1).

Nach Einführung der gebrochenen und irrationalen Zahlen dürfen a und b selbst auch gebrochene und irrationale Zahlen sein.

In den Übungsbüchern finden sich zahlreiche Beispiele für diese Aufgabe, in denen es sich meistens darum handelt, eine Frage aus dem täglichen Leben oder aus irgend einer Wissenschaft in die Form einer solchen Gleichung zu setzen. Zahlreiche schöne Aufgaben dieser Art sind uns auch aus dem Altertum überliefert in epigrammatischer Form in der griechischen Anthologie[1]).

Man nennt (1) eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten, und die Bestimmung der unbekannten Zahl x die Lösung dieser Gleichung.

Oft aber sind die Bedingungen, aus denen unbekannte Zahlen

1) Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie sind gesammelt und mit deutschen Übersetzungen und Auflösungen herausgegeben von Zirkel in dem Programm des Gymnasiums in Bonn für das Jahr 1853.

gefunden werden sollen, von weniger einfacher Art, etwa so, daß mehrere unbekannte Zahlen gleichzeitig aus mehreren Bedingungsgleichungen gefunden werden sollen. Wir stellen also zunächst die folgende allgemeinere Aufgabe:

2. Es seien a, b, c, a', b', c' gegebene Zahlen. Es sollen die unbekannten Zahlen x, y so bestimmt werden, daß die beiden Gleichungen befriedigt sind:

$$\begin{array}{rl|rr} ax + by &= c & b' & -a' \\ a'x + b'y &= c' & -b & a \end{array} \tag{2}$$

(Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.)

Bei der Lösung dieser Aufgabe kann man so verfahren: Man multipliziert mit den beigesetzten Faktoren $b', -b$ und $-a', a$ und addiert jedesmal. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} (ab' - ba')x &= cb' - bc', \\ (ab' - ba')y &= -ca' + ac', \end{aligned} \tag{3}$$

also zwei Gleichungen mit je einer Unbekannten. In beiden Gleichungen hat x und y den nämlichen Faktor

$$\varDelta = ab' - ba', \tag{4}$$

der die Determinante des Gleichungssystems (2) genannt und bisweilen auch so bezeichnet wird:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}. \tag{5}$$

3. Wenn die Determinante von Null verschieden ist, so gibt es ein und nur ein Zahlenpaar x, y, das den Gleichungen (2) genügt:

$$x = \frac{cb' - bc'}{\varDelta}, \quad y = \frac{-ca' + ac'}{\varDelta}. \tag{6}$$

Man nennt dieses Verfahren der Auflösung der Gleichungen das Eliminationsverfahren, weil dabei zuerst die eine, dann die andere Unbekannte aus den gegebenen Gleichungen herausgeschafft, „eliminiert“ wird. Man unterscheidet davon ein anderes Verfahren, was mehr schrittweise vorgeht und das Substitutionsverfahren genannt wird.

Wenn von den Koeffizienten a, b, a', b' einer von Null verschieden ist, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, es sei dies ein bestimmter, etwa b'; denn wir können eine beliebige der beiden vorgelegten Gleichungen und dann auch eine beliebige der beiden Unbekannten x, y zur letzten machen. Sei also b' von

Null verschieden. Dann würde, wenn x bekannt wäre, aus der zweiten Gleichung (2) der zugehörige Wert von y gefunden werden:

$$(7) \qquad y = \frac{c' - a'x}{b'}.$$

Setzt man aber diesen Wert von y in die erste Gleichung (2) ein („Substitution"), so folgt nach einiger Rechnung:

$$(8) \qquad \Delta x = cb' - bc',$$

und hieraus ist, wenn Δ von Null verschieden ist, x ebenso wie in (6) bestimmt. Aus (7) erhält man dann einen Ausdruck für y, der ebenfalls leicht mit (6) in Übereinstimmung gebracht wird.

Es zeigt sich hier aber auch, was eintritt, wenn $\Delta = 0$ ist. Ist dann $cb' - bc'$ nicht $= 0$, so gibt es keinen Wert von x, der der Gleichung (8) genügt, und folglich können auch die Gleichungen (2) nicht befriedigt werden. Wenn aber Δ und $cb' - bc'$ beide gleich Null sind, so enthält (8) gar keine Forderung für x mehr. Die beiden Gleichungen (2) sind befriedigt, wenn x beliebig angenommen und y dann aus (7) bestimmt wird.

Wenn aber endlich a, b, a', b' alle vier verschwinden, so können die Gleichungen (2) nur bestehen, wenn auch c und c' verschwinden. Dann aber sind sie für beliebige x und y befriedigt. Dies fassen wir so zusammen:

4. Wenn die Determinante der Gleichungen (6) verschwindet, so widersprechen die beiden Gleichungen (2) einander, und es gibt keine Lösung, oder die eine ist eine Folge der anderen und es gibt unendlich viele Lösungen.

§ 40. Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.

1. Die Aufgabe der Lösung von Gleichungen ersten Grades läßt sich noch weiter verallgemeinern. Wir betrachten noch ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, z:

$$(1) \qquad \begin{array}{l|l} ax + by + cz = e, & \\ a'x + b'y + c'z = e', & \begin{matrix} c'' & -b'' \end{matrix} \\ a''x + b''y + c''z = e'', & \begin{matrix} -c' & b' \end{matrix} \end{array}$$

worin die zwölf Koeffizienten $a, b, c, e, \ldots$ gegebene Zahlen sind.

Wenn die neun Koeffizienten $a, b, \ldots c''$ alle verschwinden, so sind die Gleichungen (1) entweder widersprechend, wenn die e, e', e'' nicht alle verschwinden, oder sie enthalten keine Forderung für die x, y, z, wenn $e = e' = e'' = 0$ ist. Aus den neun Koeffizienten

$$(2)\qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

lassen sich nun nach der folgenden Regel neun Determinanten bilden, die man erhält, wenn man je zwei der Gleichungen (1) als Gleichungen ersten Grades für die Bestimmung je zweier der Unbekannten betrachtet:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \alpha &= b'c'' - c'b'', & \beta &= c'a'' - a'c'', & \gamma &= a'b'' - b'a'', \\ \alpha' &= b''c - c''b, & \beta' &= c''a - a''c, & \gamma' &= a''b - b''a, \\ \alpha'' &= bc' - cb', & \beta'' &= ca' - ac', & \gamma'' &= ab' - ba'. \end{aligned}$$

Wenn die Koeffizienten (2) alle verschwinden, so verschwinden auch alle Determinanten (3). Betrachten wir aber jetzt den Fall, daß zwar alle Determinanten (3), nicht aber alle Koeffizienten (2) verschwinden, so sieht man leicht, daß die Gleichungen (1) entweder einander widersprechen, oder daß aus einer von ihnen die beiden anderen folgen, denn nehmen wir etwa an, es sei c'' von Null verschieden, so ergibt sich aus der letzten Gleichung (1):

$$(4)\qquad z = \frac{e'' - a''x - b''y}{c''},$$

und wenn man dies in die beiden ersten Gleichungen (1) einsetzt, so folgt nach (3)

$$(5)\qquad \begin{aligned} \beta'x - \alpha'y &= ec'' - ce'', \\ -\beta x + \alpha y &= e'c'' - c'e'', \end{aligned}$$

und wenn also $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$ ist, so muß, wenn diese Gleichungen möglich sein sollen, $ec'' - ce'' = 0$, $e'c'' - c'e'' = 0$ sein, und dann sind die Gleichungen (5) für beliebige x, y erfüllt; zu jedem Wertsystem x, y erhält man aus (4) einen bestimmten Wert z.

2. Wir betrachten weiter den Fall, daß die Determinanten (3) nicht alle verschwinden und die Allgemeinheit wird nicht beschränkt, wenn wir annehmen, daß $\alpha = b'c'' - c'b''$ von Null verschieden sei. Dann kann man aus den beiden letzten Gleichungen (1) nach Vorschrift von § 39, 3. die Unbekannten y und z unter der Voraussetzung berechnen, daß x bekannt sei, und erhält

$$(6)\qquad \begin{aligned} \alpha y &= e'c'' - e''c' + \beta x, \\ \alpha z &= -e'b'' + e''b' + \gamma x, \end{aligned}$$

und wenn man die hieraus folgenden Werte von y und z in die erste Gleichung (1) einsetzt, so ergibt sich

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''.$$

Wir setzen wieder zur Abkürzung

(7) $$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

oder, nach (3) ausgerechnet,

(8) $$\begin{aligned}\Delta &= ab'c'' - ac'b'' \\ &+ bc'a'' - ba'c'' \\ &+ ca'b'' - cb'a''\end{aligned}$$

und erhalten

(9) $$\Delta x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'',$$

woraus, wenn Δ von Null verschieden ist, x eindeutig bestimmt werden kann, und dann erhält man y und z aus den Formeln (6).

Wenn aber $\Delta = 0$ ist, so ist die Gleichung (9) nur dann erfüllbar, wenn auch

(10) $$e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'' = 0$$

ist, und dann enthält sie keine Beschränkung für x. Es bleibt dann x willkürlich, und y und z werden durch (6) bestimmt.

Die Größe Δ heißt wieder die Determinante des Systems (1), und man bezeichnet sie auch oft in übersichtlicher Weise so:

(11) $$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}.$$

Die Darstellung (8) zeigt aber, daß sich Δ nicht ändert, wenn gleichzeitig b mit a', c mit a'', c' und b'' vertauscht werden, daß man also auch

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix}$$

setzen kann.

Die neun Größen (3) $\alpha = b'c'' - c'b'', \ldots$ werden die Unterdeterminanten von Δ genannt.

3. Wenn die Determinante des Systems (1) von Null verschieden ist, so sind die Unbekannten x, y, z aus diesem System eindeutig bestimmt. Ist $\Delta = 0$, so sind die Gleichungen (1) entweder einander widersprechend, oder es bleiben eine, zwei oder drei der Unbekannten willkürlich, je nachdem eine der Größen (3) oder keine der Größen (3) aber eine der Größen (2) oder endlich keine der Größen (2) von Null verschieden ist.

4. Die Determinante Δ läßt sich in jeder der sechs Formen darstellen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \Delta = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ = b\beta + b'\beta' + b''\beta'' &= a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \\ = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''; &= a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma''. \end{aligned}$$

Diese erhält man, wenn man in (8) die Glieder zusammenfaßt, die mit a, a', a'' oder mit b, b', b'' oder mit c, c', c'' oder mit a, b, c etc. multipliziert sind, und die Bezeichnungen (3) berücksichtigt.

Es ergeben sich aber dann weiter die Relationen

$$(13)\qquad \begin{aligned} b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen Relationen braucht man nur die eine wirklich durch Rechnung abzuleiten, etwa

$$b(b'c'' - c'b'') + b'(b''c - c''b) + b''(bc' - cb') = 0,$$

die andern unterscheiden sich von dieser nur in der Bezeichnung, indem man a, b, c auf alle möglichen Arten untereinander vertauscht.

Mit Hilfe der Relationen (12) und (13) läßt sich das System (1) auch direkt (nach der Eliminationsmethode) auflösen, wenn man die Gleichungen (1) auf folgende drei Arten mit Faktoren multipliziert und addiert:

$$\begin{array}{l|lll} ax + by + cz = e & \alpha & \beta & \gamma \\ a'x + b'y + c'z = e' & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a''x + b''y + c''z = e'' & \alpha'' & \beta'' & \gamma''. \end{array}$$

Man erhält dann mit Benutzung von (12) und (13)

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Delta x &= e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'', \\ \Delta y &= e\beta + e'\beta' + e''\beta'', \\ \Delta z &= e\gamma + e'\gamma' + e''\gamma''. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt mit (9) überein, und daß die beiden anderen mit den aus (6) durch Einsetzen von (9) abgeleiteten identisch sind, ließe sich ebenfalls durch Rechnung leicht zeigen, worauf näher einzugehen nicht nötig ist.

Ein Verfahren bei dem mehrere gleichartig in der Aufgabenstellung vorkommende Größen auch im weiteren Verlauf der Rechnung gleichartig behandelt werden, heißt ein symmetrisches Verfahren.

Demnach können wir die Eliminationsmethode im Gegensatz zu der Substitutionsmethode eine symmetrische nennen.

5. Die hier abgeleiteten Sätze über die Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten x, y, z lassen sich geometrisch veranschaulichen, wenn man die Hilfsmittel der analytischen Geometrie des Raumes voraussetzt, wie sie im zweiten Bande dargestellt sind. Darnach bestimmen drei beliebige Zahlenwerte x, y, z als Koordinaten einen Punkt im Raume. Alle Punkte, deren Koordinaten einer Gleichung ersten Grades

$$ax + by + cz = e$$

genügen, liegen, wenn nicht a, b, c alle drei gleich Null sind, auf einer Ebene. Die Punkte, deren Koordinaten dieser und einer zweiten Gleichung

$$a'x + b'y + c'z = e'$$

genügen, liegen auf beiden Ebenen und gehören also der Schnittlinie dieser beiden Ebenen an. Kommt eine dritte Gleichung

$$a''x + b''y + c''z = e''$$

hinzu, so genügen die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen, oder allgemein die Koordinaten aller Punkte, die zugleich auf den drei Ebenen liegen, den drei Gleichungen.

Wenn also $\varDelta$ von Null verschieden ist, so schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkt.

Wenn aber $\varDelta = 0$ ist, ohne daß die sämtlichen Unterdeterminanten (3) verschwinden, so sind zwei Fälle möglich: entweder die Gleichung (10) ist befriedigt. Dann bleibt eine der Größen x, y, z willkürlich. Die drei Ebenen haben die Punkte einer geraden Linie gemein oder:

Die Gleichung (10) ist nicht befriedigt; dann gibt es keinen Punkt, der auf allen drei Ebenen liegt. Die Ebenen schneiden sich zu zweien in drei parallelen Linien, etwa wie die Seitenflächen eines dreiseitigen Prismas, oder zwei der Ebenen sind parallel und werden von der dritten in parallelen Geraden geschnitten.

Wenn endlich alle Unterdeterminanten (3) verschwinden, dann unterscheiden sich die linken Teile der Gleichungen (1) nur durch konstante Faktoren voneinander und die drei Ebenen sind entweder parallel oder zusammenfallend. Im ersten Fall gibt es keine, im zweiten unendlich viele Lösungen.

§ 41. Homogene Gleichungen.

1. Eine besondere Klasse von Gleichungen ersten Grades sind die homogenen Gleichungen. Das sind solche, bei denen in jedem Gliede eine der Unbekannten vorkommt, also z. B. Gleichungen von der Form

$$ax + by + cz = 0.$$

Eine solche Gleichung ist selbstverständlich immer erfüllt, wenn $x = y = z = 0$ ist. Diese Lösung heißt eine uneigentliche. Unter den eigentlichen Lösungen verstehen wir solche, bei denen wenigstens eine der Unbekannten von Null verschieden ist. Dann kann man die Gleichung durch eine nicht verschwindende Unbekannte, etwa z, dividieren, und man erhält dann eine Gleichung, die nur die Verhältnisse x/z, y/z enthält.

Die homogenen Gleichungen stellen also nicht Forderungen an die Unbekannten selbst, sondern nur an die aus ihnen zu bildenden Quotienten.

Betrachten wir zunächst ein System von zwei homogenen Gleichungen:

$$\begin{array}{l|ll} a' x + b' y + c' z = 0, & b'' & -a'' \\ a'' x + b'' y + c'' z = 0. & -b' & a' \end{array}$$

Daraus können wir die Verhältnisse x/z, y/z nach § 39 bestimmen. Multiplizieren wir nämlich mit den beigeschriebenen Faktoren und addieren, so folgt

$$(a'b'' - b'a'')x + (c'b'' - b'c'')z = 0,$$
$$(a'b'' - b'a'')y + (a'c'' - c'a'')z = 0,$$

oder in der Bezeichnung § 40, (3)

$$\gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0,$$

woraus, wenn nicht $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, folgt:

$$\frac{x}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta},$$

Gleichungen, die man bisweilen auch mit Benutzung des anderen Zeichens der Division so schreibt:

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

2. Betrachten wir nun ein System von drei homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

so können wir aus den beiden letzten die Quotienten $x : y : z$ bestimmen und in die erste einsetzen. Daraus folgt

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Delta = 0.$$

Ist aber $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so ist Δ gleichfalls Null.

Wir folgern hieraus:

Ein System von drei homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten hat nur dann eine eigentliche Lösung, wenn die Determinante Δ verschwindet.

Ist diese Bedingung befriedigt und sind α, β, γ nicht alle drei gleich Null, so erhält man die Lösung aus Nr. 1.

Wenn aber $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, so folgt die dritte der Gleichungen (1) aus der zweiten, und man erhält die Lösung aus den beiden ersten Gleichungen (1).

3. In der analytischen Geometrie bedeutet eine homogene Gleichung ersten Grades eine Ebene, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Zwei solche Ebenen haben immer eine Gerade miteinander gemein, die gleichfalls durch diesen Punkt geht. Die Gleichung $\Delta = 0$ ist die Bedingung dafür, daß sich die drei Ebenen, die durch (1) dargestellt sind, in einer Geraden schneiden.

4. Es ist nach dem bisher Entwickelten klar, wie die Aufgabe der Auflösung linearer Gleichungen verallgemeinert werden kann.

Hat man ein beliebiges System von Gleichungen ersten Grades, mit beliebigen Unbekannten $x, y, z, \ldots$, so nimmt man eine Gleichung, die eine der Unbekannten, etwa x wirklich enthält, und drückt aus dieser die Unbekannte x durch die übrigen $y, z, \ldots$ aus. Substituiert man den so gefundenen Ausdruck für x in alle Gleichungen des gegebenen Systems, so erhält man ein neues System, in dem die Unbekannte x nicht mehr vorkommt, das also wenigstens eine Unbekannte weniger enthält.

Auf diese Weise kann man fortfahren, solange überhaupt noch Unbekannte in den Gleichungen vorkommen. Was dann übrig bleibt, sind Gleichungen zwischen den gegebenen Größen, die entweder erfüllt oder nicht erfüllt sind. Sind sie nicht erfüllt, so sind die gegebenen Gleichungen nicht lösbar. Sind sie aber erfüllt, so sind die Unbekannten entweder vollständig bestimmt, oder es bleibt eine Anzahl von ihnen willkürlich. Die rechnerische Durchführung wird aber um so komplizierter und die allgemeinen Gesetze um so weniger durchsichtig, je größer die Anzahl der Unbekannten und der Glei-

chungen ist. Diesem Übelstand wird durch den von Jacobi geschaffenen Algorithmus der Determinantentheorie begegnet, durch den diese allgemeinen Gesetze einen sehr eleganten Ausdruck finden. Dieser Algorithmus überschreitet aber die Grenzen unseres Planes[1]).

§ 42. Anwendungen.

1. Von den linearen Gleichungen werden mannigfache Anwendungen in der Geometrie und in den Naturwissenschaften gemacht. Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel aus der Chemie betrachten, nämlich die sogenannte indirekte Analyse. Es seien A, B, P drei chemische Elemente, und AP, BP zwei chemische Verbindungen, in denen je ein Atom des einen mit einem Atom des anderen verbunden ist. Diese beiden Verbindungen AP, BP seien in einer Mischung enthalten, und es sei bekannt

1. das Gesamtgewicht g der Mischung,
2. das Gewicht h der in der Mischung enthaltenen Menge der Substanz P.

Wieviel von jeder der beiden Verbindungen AP, BP ist in der Mischung enthalten?

Sind x, y die unbekannten Gewichtsmengen der AP, BP, so hat man zunächst eine Gleichung

$$x + y = g. \tag{1}$$

Eine zweite Gleichung erhält man aus den Gesetzen der Chemie. Sind nämlich a, b, p die Atomgewichte der Elemente A, B, P, so ist $a + p$ das Gewicht eines Moleküls der Verbindung AP, und die Anzahl der Moleküle, die in der Gewichtsmenge x enthalten sind, ist $x/(a+p)$. Die Atome der Substanz P in dieser Menge haben das Gewicht $px/(a+p)$, und ebenso hat die in der Verbindung BP enthaltene Menge der Substanz P das Gewicht $py/(b+p)$. Demnach haben wir, da h das Gesamtgewicht der in der Mischung enthaltenen Menge der Substanz P ist, die zweite Gleichung:

$$\frac{x}{a+p} + \frac{y}{b+p} = \frac{h}{p}, \tag{2}$$

und daraus können x und y bestimmt werden (außer wenn $a = b$ ist). Man erhält:

---

1) Jacobi, de formatione et proprietatibus determinantium. Crelles Journal für Mathematik, Bd. 22 (1841); Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 4. Aufl. Leipzig 1875.

$$(3) \qquad x = \frac{a+p}{p}\,\frac{gp - h(b+p)}{a-b}, \qquad y = \frac{b+p}{p}\,\frac{h(a+p) - gp}{a-b}.$$

Dieses Verfahren ist für die Chemie von praktischer Wichtigkeit, weil es oft vorkommt, daß es zwar leicht ist, aus einer Mischung das eine Element P abzuscheiden und zu bestimmen, während es sehr schwer ist, die beiden Elemente A und B voneinander zu trennen.

2. Beispiele[1]). Man habe z. B. eine Mischung von 3 gr. Chlorkalium und Chlornatrium, und darin seien 1,7 gr. Chlor gefunden; a, b, p sind dann die Atomgewichte von Kalium, Natrium, Chlor:

$$a = 39{,}1, \qquad b = 23, \qquad p = 35{,}4$$
$$a - b = 16{,}1, \quad a + p = 74{,}5, \quad b + p = 58{,}4,$$
$$g = 3, \qquad h = 1{,}7,$$

also genähert:

$$x = \frac{74{,}5 \cdot (3 \cdot 35{,}4 - 1{,}7 \cdot 58{,}4)}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = \frac{74{,}5 \cdot 6{,}9}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = 0{,}9;$$

$$y = \frac{58{,}4 \cdot (1{,}7 \cdot 74{,}5 - 3 \cdot 35{,}4)}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = \frac{58{,}4 \cdot 20{,}4}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = 2{,}1.$$

An Stelle der Atome können auch Atomgruppen treten. Hat man z. B. 2 gr. einer Mischung von kohlensaurem Kalk ($CaCO_3$) und kohlensaurem Strontium ($SrCO_3$) und in dieser Mischung 0,7 gr. Kohlensäure (CO_2) bestimmt, so hat man in den Formeln (3) zu setzen: $g = 2$, $h = 0{,}7$,

$$\mathrm{SrO}: a = 103{,}6, \quad a - b = 47{,}6$$
$$\mathrm{CaO}: b = 56 \qquad a + p = 147{,}6$$
$$\mathrm{CO_2}: p = 44 \qquad b + p = 100$$

und findet (approximativ) $x = 1{,}3$, $y = 0{,}7$.

3. Auf eine Mischung aus mehr als zwei Substanzen ist dieses Verfahren nicht anwendbar. Wenn man in einer Mischung aus den drei Verbindungen AP, BP, CP das Element P durch ein anderes P' ersetzt, so erhält man eine Mischung aus AP', BP', CP'. Es seien die Atomgewichte a, b, c, p, p', und die ganzen Mengen seien g, g'. Es seien ferner die Mengen von P und P' mit h und h' bezeichnet. Bezeichnet man dann mit x, y, z die Mengen von A, B, C, die beide Male in der Mischung enthalten sind, so ergeben sich folgende vier Gleichungen:

1) Fresenius, Quantitative chemische Analyse, Bd. II, S. 130. Braunschweig 1877—1887.

$$\frac{a+p}{a}x + \frac{b+p}{b}y + \frac{c+p}{c}z = g,$$

$$\frac{a+p'}{a}x + \frac{b+p'}{b}y + \frac{c+p'}{c}z = g',$$

$$\frac{p}{a}x + \quad \frac{p}{b}y + \quad \frac{p}{c}z = h,$$

$$\frac{p'}{a}x + \quad \frac{p'}{b}y + \quad \frac{p'}{e}z = h'.$$

Unter diesen vier Gleichungen finden sich aber keine drei voneinander unabhängige; denn aus den beiden letzten folgt $h/p = h'/p'$ und dann geben diese beiden Gleichungen nur die eine:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{h}{p},$$

und die beiden ersten geben:

$$x + y + z = g - h = g' - h',$$

und man hat also nur zwei Gleichungen für die drei Unbekannten x, y, z, die zu ihrer Bestimmung nicht ausreichen.

4. Eine andere Anwendung linearer Gleichungen bietet die Verzweigung elektrischer Ströme in Drahtsystemen. Wir setzen die Begriffe der Stromintensität und des elektrischen Widerstandes eines Drahtes aus der Physik hier voraus und bemerken nur, daß wenn die in Betracht kommenden Drähte alle aus gleichem Material und von derselben Stärke sind, der Widerstand eines Drahtstückes geradezu durch seine Länge gemessen werden kann.

Die Stromintensität kann gedeutet werden als die Menge elektrischen Fluidums, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömt. Hat man auf einer Drahtstrecke eine positive Richtung festgesetzt, so wird die Stromintensität als positiv oder negativ bezeichnet, je nachdem der Strom die positive oder negative Richtung hat.

Denken wir uns nun ein beliebiges Drahtnetz gegeben, dem ein Strom von gegebener Intensität an einer Stelle zugeleitet und von einer anderen Stelle wieder abgeleitet wird. Die Frage ist die, wie verteilt sich der elektrische Strom auf die einzelnen Teile des Netzes?

Zur Beantwortung dieser Frage geben zwei Gesetze, die von Kirchhoff aufgestellt sind, immer eine hinreichende Anzahl von Gleichungen ersten Grades. Diese beiden Gesetze sind:

1. Wenn in einem Punkt des Netzes (Knotenpunkt) mehrere Drähte zusammenlaufen, in denen die Stromintensitäten $i_1, i_2, i_3, \ldots$

bestehen (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Knotenpunkt hin gerichtet sind), so ist

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots = 0.$$

2. Wenn man in dem Netze irgend einen Umgang macht, indem man von einem beliebigen der Knotenpunkte ausgeht, und nach Durchlaufung der Drähte 1, 2, 3, ... mit den Widerständen w_1, w_2, w_3, ... zu dem Ausgangspunkt zurückkehrt, so ist:

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \cdots = 0.$$

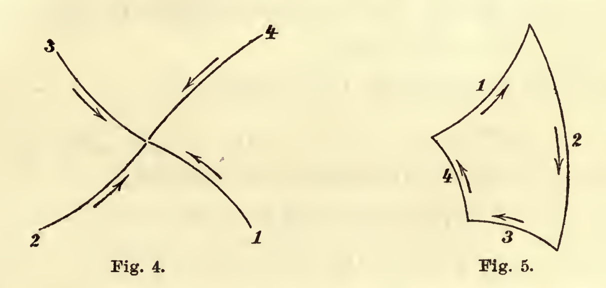


Fig. 4. Fig. 5.

3. Wir wollen diese Gesetze auf die sogenannte Wheatestonesche Brücke anwenden, die bei der Messung von Widerständen gebraucht wird. Sie besteht aus einer Drahtkombination, wie sie die Fig. 6 zeigt.

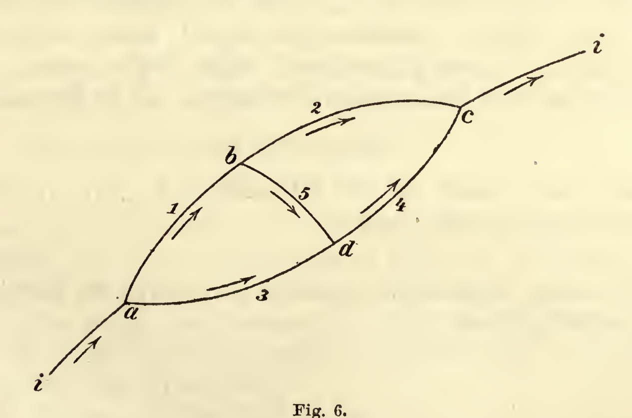


Fig. 6.

Wir haben die vier Knotenpunkte a, b, c, d. In a und c wird der Strom von der gegebenen Intensität i zu- und abgeleitet. Außerdem haben wir die Drahtstücke 1, 2, 3, 4, 5, in denen die positive Richtung durch Pfeile angedeutet ist, mit den Stromstärken i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 und den Widerständen w_1, w_2, w_3, w_4, w_5.

Nach dem ersten Gesetz ergeben uns die vier Knotenpunkte folgende vier Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \dot{i} &= \dot{i}_1 + \dot{i}_3 = \dot{i}_2 + \dot{i}_4, \\ \dot{i}_5 &= \dot{i}_1 - \dot{i}_2 = \dot{i}_4 - \dot{i}_3, \end{aligned}$$

unter denen aber nur drei voneinander unabhängig sind, da aus der ersten Doppelgleichung $\dot{i}_1 - \dot{i}_2 = \dot{i}_4 - \dot{i}_3$ folgt. Wir haben ferner die Umgänge *abd*; *bcd*; *abcd*. Die beiden ersten geben nach dem zweiten Gesetz

$$(5)\qquad \begin{aligned} \dot{i}_5 w_5 &= \dot{i}_3 w_3 - \dot{i}_1 w_1, \\ \dot{i}_5 w_5 &= \dot{i}_2 w_2 - \dot{i}_4 w_4, \end{aligned}$$

und der dritte gibt nur die hieraus folgende Relation $\dot{i}_1 w_1 + \dot{i}_2 w_2 = \dot{i}_3 w_3 + \dot{i}_4 w_4$, also nichts neues.

Man erhält nun aus den Gleichungen (4)

$$\dot{i}_4 = \dot{i} - \dot{i}_2, \quad \dot{i}_3 = \dot{i} - \dot{i}_1, \quad \dot{i}_5 = \dot{i}_1 - \dot{i}_2,$$

und wenn man dies in (5) einsetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 (w_1 + w_3 + w_5) - \dot{i}_2 w_5 &= \dot{i} w_3, \\ - \dot{i}_1 w_5 + \dot{i}_2 (w_2 + w_4 + w_5) &= \dot{i} w_4, \end{aligned}$$

woraus man $\dot{i}_1$, $\dot{i}_2$ finden kann.

Die hauptsächlichste Anwendung dieses Gleichungssystems besteht aber darin, daß man durch Verschiebung des einen Knotenpunktes, etwa d, also durch Veränderung der Widerstände w_3, w_4, zu erreichen sucht, daß die Stromintensität $\dot{i}_5 = 0$ wird, was sich durch die Beobachtung scharf kontrollieren läßt. Dann muß $\dot{i}_1 = \dot{i}_2$ und $\dot{i}_3 = \dot{i}_4$ sein, und die Gleichungen (5) ergeben als Bedingung dafür

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4,$$

und hieraus kann, wenn drei der Widerstände w_1, w_2, w_3, w_4 bekannt sind, der vierte gefunden werden[1]).

1) Kirchhoff, Poggendorffs Annalen, Bd. 72 (1847); W. Ahrens, Mathematische Annalen, Bd. 49.

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginäre Zahlen.

---

§ 43. Quadratische Gleichungen.

1. Die Gleichungen, die wir im siebenten Abschnitt betrachtet haben, hatten das Eigentümliche, daß die Unbekannten in ihnen nur in der ersten Potenz enthalten waren, und daß auch nicht verschiedene Unbekannte miteinander multipliziert vorkamen. Wir haben diese Gleichungen darum auch Gleichungen ersten Grades genannt. Man nennt sie wohl auch (mit Rücksicht auf eine geometrische Anwendung) lineare Gleichungen.

Jetzt wenden wir uns zur Betrachtung von Gleichungen, zunächst mit einer Unbekannten, in denen die Unbekannte nicht bloß in der ersten, sondern auch in der zweiten Potenz vorkommt. Diese Gleichungen heißen Gleichungen zweiten Grades oder auch quadratische Gleichungen, und ihre Auflösung erfordert neue Hilfsmittel.

2. Eine quadratische Gleichung hat die folgende Form

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Darin hat man sich unter den Koeffizienten a, b, c gegebene Zahlen vorzustellen, und x ist eine unbekannte Zahl, die so bestimmt werden soll, daß die Gleichung (1) erfüllt ist. Es bleibt einstweilen dahingestellt, ob es einen oder mehrere oder vielleicht gar keinen Wert von x gibt, der dieser Gleichung genügt. Ein Wert, der ihr genügt, heißt eine Wurzel der Gleichung.

Wir nehmen a von Null verschieden an, denn ist $a = 0$, so reduziert sich die Gleichung (1) auf $bx + c = 0$, also auf eine Gleichung ersten Grades, mit der wir uns hier nicht weiter beschäftigen. Wenn wir die ganze Gleichung (1) mit einem beliebigen von Null verschiedenen Faktor h multiplizieren, so bekommen wir eine Gleichung $hax^2 + hbx + hc = 0$, die an x genau dieselbe Forderung stellt, wie (1) selbst. Dies können wir zur Vereinfachung der Gleichung anwenden, um z. B., indem wir $h = 1/a$ annehmen, eine Gleichung

zu erhalten, in der der Koeffizient von x^2 gleich 1 ist. Zweckmäßiger ist hier aber eine andere Annahme über h, nämlich $h = 4a$. Dann erhalten wir

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

oder, da $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ ist,

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

oder, indem wir zur Abkürzung

$$b^2 - 4ac = D \tag{2}$$

setzen,

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Dadurch wird mit Hilfe einer Quadratwurzel die quadratische Gleichung auf eine lineare zurückgeführt:

$$2ax + b = \sqrt{D}.$$

Da aber das Quadrat einer negativen Zahl ebenso groß ist wie das Quadrat der entgegengesetzt gleichen positiven Zahl, so kann ebensogut

$$2ax + b = -\sqrt{D}$$

gesetzt werden. Diese beiden Gleichungen sind nicht verschieden, wenn $D = 0$ ist. Andererseits haben wir aber noch keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl kennen gelernt, und wir haben also drei Fälle zu unterscheiden:

1. D negativ: keine Wurzel,
2. $D = 0$: eine Wurzel $x = -b/2a$,
3. D positiv: zwei Wurzeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 &= -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Charakter der quadratischen Gleichung hängt also wesentlich von dem Verhalten der Größe D ab. Ersetzen wir a, b, c in (2) durch ha, hb, hc für ein beliebiges nicht verschwindendes h, so geht D in h^2D über, und das Vorzeichen von D wird nicht geändert; die Unterscheidung der drei Fälle 1, 2, 3 bleibt dieselbe. Die Größe D ist also durch die Gleichung an sich nur bis auf einen quadratischen Faktor bestimmt; dagegen ist D durch den Ausdruck $ax^2 + bx + c$ vollständig bestimmt.

Wir nennen D die Diskriminante dieses Ausdruckes.

Nehmen wir die quadratische Gleichung in der Form an:

$$x^2 + 2ax + b = 0, \tag{4}$$

was von der Gleichung (1) nur in der Bezeichnung verschieden ist, so wird $D = 4(a^2 - b)$, und wenn dies positiv ist, so werden die beiden Wurzeln:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -a - \sqrt{a^2 - b}, \\ x_2 &= -a + \sqrt{a^2 - b}. \end{aligned}$$

§ 44. Imaginäre Zahlen.

1. Wenn man die Disharmonie, die sich darin zeigt, daß gewisse quadratische Gleichungen keine Wurzeln haben, beseitigen will, so sieht man sich abermals zu einer Erweiterung des Zahlbegriffes gedrängt. Die neu einzuführenden Zahlen heißen imaginäre Zahlen, und daß diese Erweiterung sachgemäß ist, zeigt die Erfahrung in der weiteren Entwickelung der mathematischen Wissenschaft. Fast alle Gebiete gewinnen dadurch an Abrundung und Vollständigkeit; aber zu einer noch darüber hinausgehenden Erweiterung des Zahlenbereichs hat sich bisher nirgends ein zwingendes Bedürfnis herausgestellt.

2. Wir kombinieren die bisher betrachteten Zahlen, positive, negative, rationale, irrationale Zahlen, die wir von nun an auch in ihrer Gesamtheit als reelle Zahlen bezeichnen, zu Paaren.

Wenn also a, b irgend zwei reelle Zahlen sind, so führen wir, diesen entsprechend, ein neues Zahlzeichen (a, b) ein.

Diese neuen Zahlengebilde nennen wir imaginäre oder auch komplexe Zahlen.

Der Gedanke, der zu Grunde liegt, ist ganz derselbe wie der, durch den die Brüche aus den ganzen Zahlen abgeleitet werden. Die Regeln für das Rechnen mit diesen Zahlen sind aber ganz verschieden, und diese Regeln, die wir willkürlich vorschreiben können, müssen nun zunächst aufgestellt werden.

1) Zwei komplexe Zahlen $\alpha = (a, b)$, $\alpha' = (a', b')$ sollen nur dann einander gleich heißen, wenn $a = a'$, $b = b'$ ist[1]).

2) Um die reellen Zahlen als spezielle Fälle unter die komplexen mit aufnehmen zu können, setzen wir fest:

Es sei $(a, 0) = a$, also $(0, 0) = 0$.

3) Addition und Subtraktion werden definiert durch

$$(1)\qquad (a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b').$$

1) Die komplexen Zahlen in eine Größenordnung zu bringen ist im allgemeinen nicht notwendig und nicht üblich. Eine solche Ordnung ist nur in ganz speziellen Fragen nützlich und kann dann auf sehr verschiedene Arten geschehen. Man kann z. B. festsetzen, daß (a, b) größer sei als (a', b'), wenn a größer als a' oder wenn $a = a'$ und b größer als b' ist.

Man sieht, daß das associative und das kommutative Gesetz hiernach für die Addition der komplexen Zahlen gilt, daß die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist, und daß für $b = 0$, $b' = 0$ Addition und Subtraktion der komplexen Zahlen in die gleichen Operationen für die reellen Zahlen übergehen.

4) Die Multiplikation wird definiert durch

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'). \tag{2}$$

Auch dies ergibt für $b = 0$, $b' = 0$ die Multiplikation der reellen Zahlen. Associatives und kommutatives Gesetz sind befriedigt.

Die Potenzierung mit ganzen positiven Exponenten $(a, b)^n$ ergibt sich als Wiederholung der Multiplikation.

5) Die Division erklären wir als die Umkehrung der Multiplikation.

Sind (a, b), (a', b') zwei komplexe Zahlen, so wird eine dritte komplexe Zahl gesucht, die der Bedingung

$$(a, b)(x, y) = (a', b') \tag{3}$$

genügt. Diese Zahl (x, y), falls sie existiert, ist der Quotient $(a', b')/(a, b)$.

Es folgt aber aus 1), (2) und (3):

$$\begin{aligned} ax - by &= a', \\ bx + ay &= b', \end{aligned} \tag{4}$$

und wir haben also zwei Gleichungen ersten Grades mit den beiden Unbekannten x, y, die nach § 39 zu behandeln sind.

Die Determinante $\varDelta$ dieses Systems ist gleich $a^2 + b^2$ und kann also nur dann verschwinden, wenn sowohl a als b, folglich auch $(a, b) = 0$ ist. Wir schließen also hier, wie bei der Division reeller Zahlen, den Divisor Null ein für allemal aus. Dann ergibt sich aus (4)

$$x = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}, \tag{5}$$

und die Division ist also durch die Formel

$$\frac{(a', b')}{(a, b)} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\right) \tag{6}$$

eindeutig erklärt. Die Division reeller Zahlen ist wieder als Spezialfall darin enthalten.

Damit sind die vier Spezies für komplexe Zahlen in wesentlicher Übereinstimmung mit den reellen Zahlen erklärt, und die aus den Definitionen abgeleiteten Sätze behalten auch für die komplexen Zahlen ihre Gültigkeit.

3. Aus diesen Definitionen läßt sich eine sehr vereinfachte Darstellung der komplexen Zahlen ableiten.

Es ist nämlich nach 3)

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \tag{7}$$

und nach 2) und 4)

$$(a, b) = a + b\,(0, 1), \tag{8}$$

und man kann daher alle komplexen Zahlen mittels reeller Zahlenfaktoren durch die eine imaginäre Zahl (0, 1) darstellen. Man setzt zur Abkürzung

$$(0, 1) = i, \quad (-1)\,i = -i \tag{9}$$

und nennt i die imaginäre Einheit. Es wird dann nach (8)

$$(a, b) = a + bi, \tag{10}$$

und wir können von jetzt an die Bezeichnung (a, b), die nur provisorisch war, ganz fallen lassen; a heißt der reelle Teil, bi oder ib der imaginäre Teil der komplexen Zahl $a + bi$. Der imaginäre Teil heißt positiv oder negativ, je nachdem b positiv oder negativ ist. Eine imaginäre Zahl, deren reeller Teil $= 0$ ist, also bi, heißt rein imaginär. Zwei Zahlen von gleichem reellen und entgegengesetztem imaginären Teil, also $a + bi$ und $a - bi$ heißen konjugiert imaginär.

Wenn man in (2) $a = a' = 0$, $b = b' = +1$ oder $= -1$ setzt, so ergibt sich

$$i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1, \tag{11}$$

und demnach wird i auch die Quadratwurzel aus -1 genannt oder

$$i = \sqrt{-1} \tag{12}$$

geschrieben. Im Gebiete der imaginären Zahlen gibt es also auch Zahlen, deren Quadrate negativ sind, und demnach erhalten im Gebiete der imaginären Zahlen die Ausdrücke x_1, x_2 für die Wurzeln der quadratischen Gleichung (§ 43, (3)) auch für eine negative Diskriminante D eine Bedeutung.

4. Man erhält danach folgende Formeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned}(a + bi) \pm (a' + b'i) &= (a \pm a') + i\,(b \pm b'),\\ (a + bi)(a' + b'i) &= aa' - bb' + i\,(ab' + ba'),\\ \frac{a' + b'i}{a + bi} &= \frac{aa' + bb' + i\,(ab' - ba')}{a^2 + b^2},\end{aligned} \tag{13}$$

und diese Formeln sind in den allgemeinen Vorschriften über das Rechnen mit Brüchen in Buchstabenausdrücken enthalten.

5. Jedes Rechnungsresultat mit imaginären Zahlen läßt sich nach diesen Formeln in die Form $A + Bi$ bringen, wo A und B reelle Zahlen sind. Ersetzt man jede Zahl, die bei der Bildung des Resultates mitgewirkt hat, durch ihre konjugierte, so entsteht das konjugiert imaginäre Resultat $A - Bi$. Daraus folgt, daß man in jeder richtigen Gleichung zwischen komplexen Zahlen i durch $-i$ ersetzen darf, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben.

§ 45. Quadratwurzeln aus imaginären Zahlen.

Diese Sätze gelten zunächst nur für die Rechnung im Gebiete der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, die wir auch als die rationalen Rechenoperationen bezeichnen.

Es sind damit alle Sätze über lineare Gleichungen unmittelbar auf das Zahlenreich komplexer Zahlen übertragbar.

Um aber auch die Sätze und Formeln über die quadratischen Gleichungen auf das komplexe Zahlenreich übertragen zu können, ist noch die Erklärung der Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl erforderlich. Wir stellen uns also die Aufgabe:

Es ist eine komplexe Zahl $a + bi$ gegeben. Es wird eine andere komplexe Zahl $x + yi$ gesucht, deren Quadrat gleich $a + bi$ ist. Es muß also die Gleichung befriedigt sein:

$$a + bi = (x + yi)^2. \tag{1}$$

Dann nennen wir $x + yi$ eine Quadratwurzel aus $a + bi$ und setzen

$$x + yi = \sqrt{a + bi}.$$

Die Gleichung (1) ergibt aber, wenn wir das Quadrat ausführen und dann den reellen Teil dem reellen, den imaginären dem imaginären Teil der anderen Seite gleich setzen:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir haben also hier bereits eine höhere Aufgabe, nämlich zwei Unbekannte x und y aus zwei Gleichungen zu bestimmen, von denen keine linear ist. Entnehmen wir den Wert $b/2x$ für y aus der zweiten Gleichung und setzen ihn in die erste ein, so bekommen wir für x die Gleichung

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

oder

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0,$$

also eine Gleichung vom vierten Grade. Diese Gleichung hat aber eine so spezielle Form, daß sie leicht aufgelöst werden kann. Sie ist nämlich nur vom zweiten Grade, wenn wir x^2 statt x als Unbekannte betrachten, und wenn wir sie also nach den Formeln (3) § 43 auflösen, so erhalten wir

$$x_1^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad x_2^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Nun tritt noch die weitere Forderung hinzu, daß x eine reelle Zahl sein soll; also muß x^2 positiv sein. Da aber $a^2 < a^2 + b^2$, also $a < \sqrt{a^2 + b^2}$ ist, so ist $a - \sqrt{a^2 + b^2}$ negativ, und wir können also für x^2 nur die zweite dieser beiden Wurzeln nehmen. Demnach haben wir

$$(3) \qquad x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

erhalten also zwei Werte von x, von denen der eine positiv, der andere negativ ist.

Der Wert von x ist nur dann gleich 0, wenn $b = 0$ und a negativ ist (denn dann ist $\sqrt{a^2} = -a$). In diesem besonderen Fall ist dann, wie sich aus (2) ergibt, $y = \pm \sqrt{-a}$.

Wenn aber x bekannt und von Null verschieden ist, so geht die zweite Gleichung (2) in eine lineare Gleichung für y über. Für y bekommen wir zu jedem x nur einen Wert und zwar, wenn b positiv ist, zum positiven x einen positiven, zum negativen x einen negativen, und wenn b negativ ist, umgekehrt.

2. Etwas eleganter erhält man das Endresultat auf folgendem Wege.

Wenn wir die Gleichungen (2) ins Quadrat erheben, so folgt:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a^2,$$
$$4x^2y^2 = b^2,$$

und daraus durch Addition, da $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ ist,

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

und hier ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen.

Wenn wir die erste Gleichung (2) hierzu addieren und davon subtrahieren, so ergibt sich

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

und diese beiden Werte sind immer positiv, welche reellen Werte die Zahlen a, b auch haben mögen. Also ist

$$(4) \qquad x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}};$$

jeder dieser Ausdrücke hat zwei entgegengesetzte Werte. Ihre Kombinationen würden also vier Wertepaare liefern. Von diesen Kombinationen sind aber nur zwei zulässig, nämlich die beiden Paare mit gleichem Vorzeichen, wenn b positiv ist, und die mit entgegengesetztem Zeichen, wenn b negativ ist.

Wir sehen also, daß eine Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl zwei Werte hat, die nur im Vorzeichen voneinander verschieden sind. Das Zeichen $\sqrt{a+bi}$ ist also zweideutig. Will man seine Bedeutung fixieren, so muß man irgendwie angeben, welche der beiden Wurzeln gemeint ist, z. B. dadurch, daß man fordert, der reelle Teil x soll positiv sein. Das Quadratwurzelzeichen wird bisweilen in einem bestimmten Sinne, bisweilen aber auch so gebraucht, daß man unbestimmt läßt, welcher der beiden Werte gemeint ist.

Die Bedeutung höherer Wurzeln aus komplexen Zahlen, die Logarithmen und Potenzen mit komplexen Exponenten können wir erst später erklären.

§ 46. Funktionen zweiten Grades.

1. Nach der Einführung der imaginären Zahlen ist es also möglich, die Gleichungen zweiten Grades ganz allgemein aufzulösen, mag die Diskriminante positiv oder negativ sein, und selbst dann noch, wenn die Koeffizienten und die Diskriminante selbst komplex sind. Wir erhalten immer zwei Wurzeln, abgesehen von dem Falle, wo die Diskriminante verschwindet. In diesem Falle ist nur eine Wurzel vorhanden.

Der Ausdruck

$$ax^2 + bx + c$$

heißt, wenn x eine ganz unbestimmte Größe ist, eine Funktion zweiten Grades oder eine quadratische Funktion von x. Wir wollen ihn kürzer durch das Zeichen $f(x)$ bezeichnen, worin f als Abkürzung des Wortes „functio" zu betrachten ist. Die a, b, c heißen die Koeffizienten und x das Argument der Funktion. Diese Funktion erhält nur dann den Wert Null, wenn für x einer der Werte x_1, x_2 (§ 43, (3)) gesetzt wird, nämlich

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}. \quad (D = b^2 - 4ac)$$

Aus diesen Ausdrücken ergibt sich aber

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{D}}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

und hieraus:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2),$$

also

(1) $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Hiermit haben wir den Satz gewonnen:

Eine Funktion zweiten Grades läßt sich in einen Zahlenfaktor a und in zwei Faktoren ersten Grades $x - x_1$, $x - x_2$ zerlegen.

Aus der Zerlegung selbst ersieht man sofort, daß $f(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_2$ verschwindet. Die Zerlegung (1) gilt aber allgemein für jeden beliebigen Wert der unbestimmten Größe x und wird darum eine Identität genannt. Die Größen x_1, x_2 werden auch die Wurzeln der Funktion $f(x)$ (anstatt Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$) genannt.

Zur Auffindung dieser Zerlegung muß man die Wurzeln der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ kennen, und der Satz selbst ist wesentlich identisch mit dem früher bewiesenen, daß jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat. Er hat aber vor diesem den Vorzug, daß auch der Fall einer verschwindenden Diskriminante keine Ausnahme bildet. In diesem Falle werden beide lineare Faktoren identisch, und es wird

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

das Quadrat einer linearen Funktion.

Um beide Sätze in völlige Übereinstimmung zu bringen, sagt man, daß im Falle einer verschwindenden Diskriminante die im allgemeinen verschiedenen Wurzeln der quadratischen Gleichung einander gleich werden, und man nennt dann x_1 auch eine Doppelwurzel.

3. Nimmt man $a = 1$ an, setzt also die quadratische Funktion in die Form

(2) $$f(x) = x^2 + bx + c,$$

so ergibt sich

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c, \quad (x_1 - x_2)^2 = D,$$

und wir haben also den Satz:

Ist der Koeffizient von x^2 gleich 1, so ist der Koeffizient von x gleich der negativen Summe, der von x unab-

hängige Koeffizient gleich dem Produkt und die Diskriminante gleich dem Quadrat der Differenz der Wurzeln.

Hierin zeigt es sich unmittelbar, daß D dann und nur dann verschwindet, wenn $x_1 = x_2$ wird.

4. Hiernach führt die Aufgabe, zwei Zahlen zu bestimmen, deren Summe und Produkt gegeben sind, auf eine quadratische Gleichung. Sind die unbekannten Zahlen x und y und ist

$$x + y = a,\quad xy = b \tag{3}$$

gegeben, so sind x und y die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - az + b = 0,$$

und man kann nach Belieben die eine dieser Wurzeln für x, die andere für y setzen, so daß man nur eine Lösung der gestellten Aufgabe erhält. Man findet die Lösung direkt, wenn man die erste der Gleichungen (3) ins Quadrat erhebt, und das vierfache der zweiten davon subtrahiert:

$$(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 = a^2 - 4b,$$

folglich

$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

und folglich

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4b},\quad 2y = a - \sqrt{a^2 - 4b}.$$

Gibt man der Quadratwurzel das andere Zeichen, so vertauscht sich x mit y.

Ist die Differenz und das Produkt gegeben, also

$$x - y = a,\quad xy = b,$$

so folgt ebenso

$$(x - y)^2 + 4b = (x + y)^2 = a^2 + 4b,$$

folglich

$$x + y = \sqrt{a^2 + 4b},$$

also

$$2x = a + \sqrt{a^2 + 4b},\quad 2y = -a + \sqrt{a^2 + 4b}.$$

Gibt man hier der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen, so geht x in $-y$ und y in $-x$ über. Wir haben also hier zwei verschiedene Lösungen.

5. Wenn die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung reelle Zahlen sind, so können die Wurzeln, wie wir gesehen haben, doch imaginär sein, nämlich wenn die Diskriminante negativ ist. Dann ist $\sqrt{D}$ rein imaginär, und wenn die eine Wurzel $= \alpha + \beta i$ gesetzt wird, mit reellen α, β, so ist die andere Wurzel $= \alpha - \beta i$, also:

Wenn eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine imaginäre Wurzel hat, so hat sie auch eine zweite, zur ersten konjugiert imaginäre Wurzel.

Wenn man aber auch imaginäre Koeffizienten in der quadratischen Gleichung zuläßt, so kann man immer eine quadratische Funktion $(x - \alpha)(x - \beta)$ bilden, deren Wurzeln zwei beliebig gegebene Zahlen α, β sind.

§ 47. Geometrische Darstellung imaginärer Zahlen.

1. Wie man die Gesamtheit der reellen Zahlen geometrisch auf einer geraden Linie darstellt, so kann man die komplexen Zahlen in einem Raumgebiete von zwei Dimensionen, z. B. in einer Ebene, darstellen.

Wir denken uns eine Ebene und in ihr zwei zu einander rechtwinklige Gerade, die wir die Koordinatenachsen, die eine die x-Achse, die andere die y-Achse, nennen. Den Schnittpunkt dieser beiden Geraden nennen wir den Nullpunkt oder den Anfangspunkt und betrachten ihn als Bild für die Zahl Null.

Auf jeder der beiden Achsen unterscheiden wir, vom Nullpunkt ausgehend, nach Willkür eine positive und eine negative Seite. Wir wollen, um das Bild zu fixieren, uns die x-Achse etwa von West nach Ost, die y-Achse von Süd nach Nord gerichtet denken, und auf der x-Achse die Osthälfte, auf der y-Achse die Nordhälfte positiv nennen (man denke an eine Landkarte).

Jede dieser Achsen teilt die Ebene in zwei Halbebenen, von denen wir die eine, die die positive Hälfte der anderen Achse enthält, die positive Halbebene nennen, die andere die negative.

Wir setzen nun noch eine Längeneinheit (etwa das Centimeter) fest und tragen vom Nullpunkt aus ein Zahlenpaar x, y mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen als zwei Strecken auf der x-Achse und der y-Achse ab.

In den Endpunkten dieser Strecken errichte man Senkrechte auf den beiden Achsen, die sich in einem bestimmten Punkt z der Ebene schneiden werden. Die beiden Strecken x, y heißen die Koordinaten des Punktes z; x die Abscisse, y die Ordinate.

Die vier Quadranten der Ebene werden durch die Vorzeichen von x und y unterschieden:

1. Quadrant: x positiv, y positiv,
2. Quadrant: x negativ, y positiv,
3. Quadrant: x negativ, y negativ,
4. Quadrant: x positiv, y negativ.

Den Punkt z betrachtet man auch als das Bild der imaginären Zahl

$$z = x + yi. \tag{1}$$

Auf diese Weise entspricht jedem Punkt der Ebene eine imaginäre Zahl, und umgekehrt wird jede imaginäre Zahl durch einen und nur einen Punkt der Ebene dargestellt.

Ebenso wie man die reellen Zahlen auf einer geraden Linie einerseits durch Punkte, andererseits durch Strecken darstellen kann, wobei die positiven Zahlen Strecken in der einen Richtung (etwa nach rechts), die negativen Zahlen Strecken in der entgegengesetzten Richtung bedeuten, so kann man die komplexen Zahlen durch gerichtete Strecken versinnlichen, wobei aber nicht bloß zwei Richtungen, sondern alle Richtungen in einer Ebene in Betracht kommen. So würde uns in der Fig. 7 die Strecke $\overline{oz}$, in der Richtung des Pfeiles genommen, ein Bild der komplexen Zahl z sein.

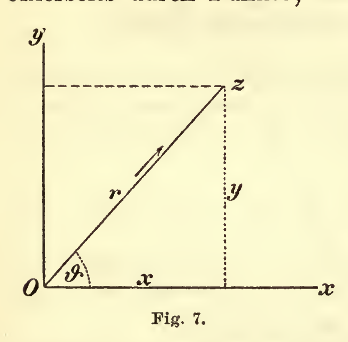


Fig. 7.

Hiernach ist es eine durchaus naturgemäße Bezeichnung von Weierstraß, daß man die Strecke $\overline{oz} = r$, ohne Rücksicht auf die Richtung, den absoluten Wert der komplexen Zahl z nennt. Ihr numerischer Ausdruck ist, wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten x, y und der Hypotenuse r ergibt,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Die Richtung der Strecke $\overline{oz}$ wird bestimmt durch den Winkel, den sie mit einer festen Richtung, z. B. mit der positiven x-Achse, bildet.

Dieser Winkel mißt die Drehung der Strecke $\overline{oz}$ gegen die x-Achse, die wir in einem bestimmten Sinne positiv nehmen, z. B. in dem Sinne von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse (der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzt, von Ost über Nord nach West und Süd). Wenn nur die Lage der Strecke $\overline{oz}$, nicht die Drehung in Betracht kommt, so genügt es, wenn wir diesen Winkel in einem Intervall von 360 Grad, z. B. zwischen 0 Grad und 360 Grad oder zwischen -180 Grad und $+180$ Grad annehmen, um diese Lage in allen Fällen eindeutig zu bestimmen.

Wir nennen diesen Winkel die Phase der komplexen Zahl z. Man kann aber zu der gleichen Lage der Strecke $\overline{oz}$, also zu derselben Phase, durch unendlich viele verschiedene Drehungen ge-

langen, die sich um positive oder negative Vielfache von 360 Grad voneinander unterscheiden.

Anstatt den Winkel in Graden zu messen, wird er auch oft in Bogenmaß gemessen (§ 28). Dann erhält der Winkel von 180 Grad die Maßzahl π, eine volle Drehung die Maßzahl 2π. Unter der Phase verstehen wir dann einen Winkel, der zwischen 0 und 2π oder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt.

2. Die Darstellung komplexer Zahlen durch gerichtete Strecken ist besonders zweckmäßig zur Veranschaulichung der Addition und Subtraktion.

Die Summe zweier komplexen Zahlen

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i$$

ist nach § 44, 4.

$$z_1 + z = x_1 + x + i(y_1 + y).$$

Diese Summe wird also durch einen Punkt dargestellt, dessen Koordinaten $x_1 + x$, $y_1 + y$ sind, und diesen Punkt erhält man, wie die Fig. 8 zeigt, als vierten Eckpunkt eines Parallelogramms, und zwar dem Nullpunkt gegenüberliegend, von dem drei Ecken die Punkte o, z, z_1 sind.

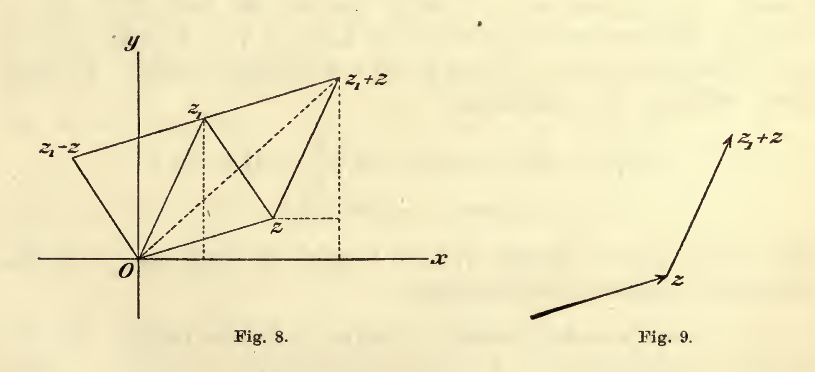


Fig. 8. Fig. 9.

Ebenso erhält man die Differenz $z_1 - z$ dargestellt durch den dem Punkt z gegenüberliegenden Eckpunkt des Parallelogramms $o, z, z_1, z_1 - z$.

Diese Konstruktion zeigt aber, daß man den Punkt $z_1 + z$ erhält, wenn man an den Endpunkt der Strecke z die Strecke z_1 in der ihr eigentümlichen Richtung anträgt (Fig. 9), und diese Konstruktion ist fortsetzbar für eine Summe aus beliebig vielen Summanden

$$z + z_1 + z_2 + \cdots.$$

Man erhält dann einen gebrochenen Streckenzug z, $z + z_1$, $z + z_1 + z_2$ u. s. w., in dem jede Strecke ihre eigentümliche Länge und Richtung hat. Der Endpunkt dieses Zuges stellt die gesuchte Summe dar.

Wenn man die Summanden untereinander vertauscht, so erhält man zwar andere Streckenzüge, aber immer den gleichen Endpunkt, worin das kommutative Gesetz der Addition seinen Ausdruck findet (Fig. 10).

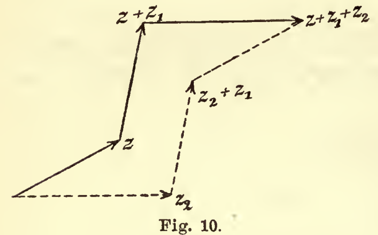


Fig. 10.

Die Subtraktion kann als Addition der entgegengesetzten Strecke betrachtet werden. Man konstruiert also die Differenz $z_1 - z$, indem man die Strecke z am Endpunkt von z_1 in der ihr entgegengesetzten Richtung anträgt.

3. Zur Darstellung der komplexen Zahlen durch die Phase und den absoluten Wert benutzt man die trigonometrischen Funktionen $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, deren geometrische Theorie im 2. Bande entwickelt ist, deren einfachste Eigenschaften hier vorausgesetzt werden müssen.

Es sei daran erinnert, daß in einem rechtwinkligen Dreieck, in dem ein spitzer Winkel $=\vartheta$ ist, das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse der Sinus von ϑ, das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse der Kosinus von ϑ heißt, und daß diese beiden Funktionen mit $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ bezeichnet werden. Zwischen diesen bestehen die Relationen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta,$$

$$\sin\vartheta^2 + \cos\vartheta^2 = 1.$$

Geht man über den spitzen Winkel hinaus, so bestimmen sich diese Funktionen durch die Gleichungen

$$\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta, \qquad \cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta,$$

$$\sin(\vartheta + \pi) = -\sin\vartheta, \quad \cos(\vartheta + \pi) = -\cos\vartheta.$$

Es haben also $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ in den vier Quadranten dasselbe Vorzeichen, wie x und y (Nr. 1.). Es ist ferner

$$\sin(\vartheta + 2\pi) = \sin\vartheta, \qquad \cos(\vartheta + 2\pi) = \cos\vartheta,$$

$$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta, \qquad \cos(-\vartheta) = \cos\vartheta,$$

und alle Drehungen, die zu derselben Phase führen, haben denselben Sinus und denselben Kosinus.

Wir gebrauchen noch die vier Additionsformeln:

$$\cos(\vartheta + \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta + \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\cos(\vartheta - \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta - \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta \sin\vartheta_1,$$

und den Kosinussatz aus der Trigonometrie, nach dem, wenn a, b, c die Seiten eines Dreiecks, α der der Seite a gegenüberliegende Winkel ist, die Relation besteht

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

4. Betrachten wir hiernach das rechtwinklige Dreieck r, x, y in Fig. 7, so ergibt sich

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

oder

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

und diese Formel gilt allgemein, in welchem der vier Quadranten der Ebene der Punkt z liegen mag, und sie gilt auch noch, wenn man unter ϑ nicht die Phase, sondern den Winkel einer beliebigen Drehung die zu z führt, versteht.

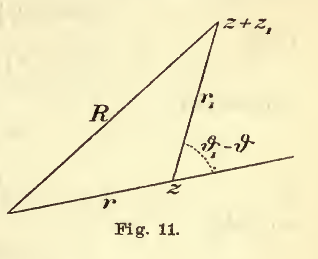


Fig. 11.

5. Es seien z, z_1 zwei komplexe Größen mit den absoluten Werten r, r_1 und den Phasen ϑ, ϑ_1. Die Summe $z + z_1$ habe den absoluten Wert R. Dann ergibt sich aus dem Dreieck R, r, r_1, in dem der Winkel zwischen r und r_1 gleich $\pi - (\vartheta_1 - \vartheta)$ ist:

$$R^2 = r_1^2 + r^2 + 2rr_1\cos(\vartheta_1 - \vartheta),$$

und das kann man in den beiden Formen darstellen:

$$R^2 = (r_1 + r)^2 - 2rr_1(1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)),$$
$$R^2 = (r_1 - r)^2 + 2rr_1(1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta)).$$

Da nun jeder Kosinus ein echter Bruch (höchstens $= \pm 1$) ist, so wird $1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)$ und $1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta)$ niemals negativ, und folglich ist R^2 kleiner als $(r_1 + r)^2$ und größer als $(r_1 - r)^2$. Daraus folgt der Satz:

Der absolute Wert einer Summe ist niemals größer als die Summe der absoluten Werte und niemals kleiner als die Differenz der absoluten Werte der Summanden.

Man sieht hierin den Ausdruck für den geometrischen Satz, daß in einem Dreieck eine Seite stets kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seiten ist.

Der absolute Wert der Summe ist nur dann gleich der Summe

der absoluten Werte, wenn $\vartheta_1 = \vartheta$ und nur dann gleich der Differenz der absoluten Werte, wenn $\vartheta_1 - \vartheta$ gleich zwei Rechten ist. In diesen beiden Fällen ist der Quotient $z/z_1 = \pm r/r_1$, also reell und zwar im ersten Fall positiv, im zweiten negativ.

6. Um die Multiplikation und die Division geometrisch zu veranschaulichen, setzen wir

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1),$$

und bilden nach § 44, 4.

$$zz_1 = rr_1[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta\cos\vartheta_1)],$$
$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta\cos\vartheta_1)],$$

also nach den Additionsformeln (Nr. 3):

$$(10)\qquad \begin{aligned} zz_1 &= rr_1[\cos(\vartheta_1 + \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta)] \\ \frac{z_1}{z} &= \frac{r_1}{r}[\cos(\vartheta_1 - \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta)]. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$zz_1 = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$\frac{z_1}{z} = R'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

so folgt

$$R = rr_1, \quad R' = \frac{r_1}{r}.$$

Nehmen wir, wie oben festgesetzt, die Phasen zwischen 0 und 2π an, so kann $\vartheta_1 - \vartheta$ negativ und $\vartheta_1 + \vartheta$ größer als 2π sein, aber die Differenz ist größer als -2π, die Summe kleiner als 4π. Wir haben also

$$\begin{aligned} \theta &= \vartheta_1 + \vartheta, & &\text{wenn } \vartheta_1 + \vartheta < 2\pi \\ &= \vartheta_1 + \vartheta - 2\pi, & &\text{„} \quad \vartheta_1 + \vartheta \geqq 2\pi \\ \theta' &= \vartheta_1 - \vartheta, & &\text{wenn } \vartheta_1 \geqq \vartheta \\ &= \vartheta_1 - \vartheta + 2\pi, & &\text{„} \quad \vartheta_1 < \vartheta. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Der absolute Wert eines Produktes oder eines Quotienten ist gleich dem Produkt oder dem Quotienten der absoluten Werte.

Die Phase eines Produktes oder eines Quotienten ist, abgesehen von einem Vielfachen von vier Rechten, gleich der Summe oder der Differenz der Phasen.

7. Diese Sätze ergeben für die Konstruktion des Produktes die folgende Regel.

Man trage auf der positiven x-Achse die Strecke 1 (die Längeneinheit) ab und konstruiere zu dem Dreieck $(o, 1, z)$ ein ähnliches Dreieck (o, z_1, z_2). Dann ergibt sich aus den Sätzen über ähnliche Dreiecke (vgl. den zweiten Band):

$$r_2 : r_1 = r : 1,$$

also $r_2 = r r_1 = R$ und der Winkel $z_2 o 1 = \vartheta + \vartheta_1 = \theta$. Folglich ist z_2 der Punkt, der das Produkt $z z_1$ repräsentiert. Und auf die gleiche Weise erhält man den Quotienten $z_1 = z_2/z$, wenn man zwei ähnliche Dreiecke $(o 1 z)$ und $(o z_1 z_2)$ konstruiert.

Der Quotient z_2/z wird durch den Punkt dargestellt, der zu dem Punkt z_2 ebenso liegt, wie der Einheitspunkt zum Punkte z.

Fig. 12.

8. Setzt man $\vartheta_1 = \vartheta$, $r_1 = r$, so ergibt die Multiplikationsformel (10) (Nr. 6)

$$z^2 = r^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta),$$

und wenn man in der gleichen Formel $z_1 = z^2$, $r_1 = r^2$, $\vartheta_1 = 2\vartheta$ setzt, so folgt

$$z^3 = r^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta),$$

und so ergibt sich allgemein

$$z^n = r^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta), \tag{11}$$

eine Formel, die man mittels der vollständigen Induktion allgemein beweist, wenn man in (10) $z_1 = z^n$, $r_1 = r^n$, $\vartheta_1 = n\vartheta$ setzt.

Wenn man aber in der zweiten Formel (10)

$$z_1 = 1, \quad r_1 = 1, \quad \vartheta_1 = 0$$

setzt, so ergibt sich

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta),$$

und wenn man hierin z durch z^n ersetzt, nach (11)

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta).$$

Es gilt also die Formel (11) nicht nur für positive, sondern auch für negative ganze Zahlen n.

Die Formel (11) ist unter dem Namen der Moivreschen Formel bekannt. Sie gibt eine Darstellung der Potenzen komplexer Zahlen mit ganzzahligen Exponenten. Wie man die Formel anzu-

wenden hat, um Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten zu erklären, werden wir später sehen.

Was die Geschichte der imaginären Zahlen betrifft, so ist zu erwähnen, daß die Erscheinung, daß Gleichungen unter Umständen keine Wurzeln mehr im Gebiete der Zahlen haben, bemerkt worden ist, sobald man anfing sich mit solchen Gleichungen zu beschäftigen, daß man aber auch sehr früh schon angefangen hat, formelle Rechnungen mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ auszuführen, als ob es sich um wirkliche Zahlen handle. Es findet sich dies schon bei Hieronymus Cardanus (1501—1576), der den negativen Wurzeln noch unter Umständen einen gewissen Sinn beilegt, während er diese imaginären Symbole nicht zu deuten weiß. Descartes (1596—1650) braucht bereits die Ausdrücke „reelle Wurzeln" und „imaginäre Wurzeln". Auf diesem Standpunkt blieb die Anschauung der Mathematiker bis in das 19. Jahrhundert stehen, wiewohl das formale Rechnen mit imaginären Größen immer mehr und mehr angewandt und ausgebildet wurde, so von Leibniz, Newton, d'Alembert, und besonders von Euler. Es haftete aber dem Begriff immer etwas mysteriöses an, bis man erkannt hat, daß es sich hier lediglich um eine naturgemäße und erlaubte Weiterbildung des vom menschlichen Geiste geschaffenen Zahlbegriffs handelt, die bei der Darstellung gewisser Beziehungen von Dingen dieselbe Realität und dieselbe Berechtigung hat, wie die reellen Zahlen. Klarheit wurde darüber vorzugsweise durch die Arbeiten von Cauchy und Gauß geschaffen, dem wir auch die oben besprochene geometrische Darstellung imaginärer Zahlen verdanken[1]).

---

1) Abraham de Moivre, 1667—1754, nach Aufhebung des Ediktes von Nantes des protestantischen Glaubens wegen aus Frankreich ausgewandert, lebt und wirkt in London in der Umgebung Newtons. Sein Werk „Miscellanea analytica", in dem der genannte Lehrsatz enthalten ist, erschien 1730.

Gauß, Göttinger gelehrte Anzeigen, 23. April 1831, in einer Selbstanzeige der Schrift „Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda" und in dieser Abhandlung selbst. In einem erst 1880 gedruckten Brief von Gauß an Bessel aus dem Jahre 1811 finden sich auch bereits sehr wichtige Ausführungen über diesen Gegenstand. Cauchy, Analyse algébrique (1821), Exercices d'analyse, T. III. (1844). Von neueren Darstellungen erwähnen wir: Heine, Die Elemente der Funktionentheorie, Crelles Journal, Bd. 74, (1871).

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

§ 48. Permutationen.

1. Wenn man eine endliche Menge von Dingen hat, deren Zahl wir mit n bezeichnen wollen, so können wir, wie wir schon früher gesehen haben, diese Zahl auf mehrere verschiedene Arten abzählen, mit anderen Worten, wir können diese Dinge auf verschiedene Arten den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ zuordnen, oder wie wir auch sagen können, es lassen sich diese Dinge auf mehrere Arten anordnen.

Ein einzelnes Ding läßt sich natürlich nur auf eine Art anordnen, zwei Dinge a, b auf zwei Arten ab, ba, drei Dinge a, b, c auf sechs Arten $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Man erhält diese Anordnungen, wenn man jedes der drei Elemente a, b, c an die erste Stelle setzt und dann die beiden übrigen in je zwei Anordnungen folgen läßt.

Diese verschiedenen Anordnungen heißen die Permutationen der n Elemente der Menge. Diese Permutationen selbst bilden, wie die ersten Fälle zeigen, selbst eine endliche Menge; dies wollen wir nun durch vollständige Induktion allgemein beweisen, indem wir zugleich die Anzahl der Permutationen von n Elementen bestimmen.

Wir nehmen also an, daß die Anzahl der Permutationen von $n-1$ Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ endlich sei und bezeichnen diese Zahl mit $\Pi(n-1)$. Wir fügen nun noch ein n^{tes} Element a_n hinzu, und wir können dieses n^{te} Element in jeder der Permutationen der $n-1$ Elemente an die erste, an die zweite, an die dritte u. s. f., zuletzt an die n^{te} Stelle setzen. Auf diese Weise erhalten wir aus jeder Permutation der $n-1$ Elemente n Permutationen der n Elemente, und diese sind alle von einander verschieden. Hieraus ergibt sich

$$\Pi(n) = n\,\Pi(n-1). \tag{1}$$

Nun ist $\Pi(1) = 1$, $\Pi(2) = 2$, also $\Pi(3) = 2 \cdot 3$ und allgemein (nach der vollständigen Induktion)

(2) $$\Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

d. h. gleich dem Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n.

Dieses Produkt wird auch durch das Zeichen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

bezeichnet und die Fakultät von n (n-Fakultät) genannt.

Hierdurch ist die Anzahl der Permutationen einer Menge von n Elementen vollständig bestimmt.

Die Formel (1) läßt sich verallgemeinern. Denn ist m eine natürliche Zahl und $m < n$, so ist

(3) $$\Pi(n) = (m+1)(m+2) \cdots n\,\Pi(m).$$

Die Zahl $\Pi(n)$ wächst sehr schnell mit n. Es ist z. B.

$$\Pi(1) = 1, \quad \Pi(2) = 2, \quad \Pi(3) = 6, \quad \Pi(4) = 24, \quad \Pi(5) = 120,$$
$$\Pi(6) = 720, \quad \Pi(7) = 5040, \quad \Pi(8) = 40\,320, \quad \Pi(9) = 362\,880,$$
$$\Pi(10) = 3\,628\,800.$$

In Bezug auf das Wachsen der Zahl $\Pi(n)$ gilt der folgende allgemeine Satz:

2. Ist a eine beliebige positive Zahl, größer als 1, so kann man m so groß annehmen, daß $\Pi(n) > a^n$ ist, sobald $n > m$ ist.

Um den Satz zu beweisen, nehme man eine ganze Zahl $p > a$ an. Dann ist $a/p = \Theta$ ein positiver echter Bruch, und es ist, wenn n eine noch größere ganze Zahl ist,

$$\frac{a}{p+1} < \Theta, \quad \frac{a}{p+2} < \Theta, \; \cdots, \; \frac{a}{n} < \Theta,$$

folglich, wenn man das Produkt aller dieser Größen bildet,

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\cdots n} < \Theta^{n-p}.$$

Multipliziert man dies mit $a^p/\Pi(p)$, so folgt nach (3)

(4) $$\frac{a^n}{\Pi(n)} < \frac{a^p\,\Theta^n}{\Theta^p\,\Pi(p)}.$$

Jetzt läßt sich aber nach § 18, 8. m so groß annehmen, daß wenn $n > m$ ist,

$$\Theta^n < \Theta^p a^{-p}\,\Pi(p)$$

wird, und dann ist die rechte Seite von (4) und folglich auch die linke ein echter Bruch und mithin

(5) $$\Pi(n) > a^n,$$

wie zu beweisen war.

3. Unter einem Polygon (Vieleck, n-Eck) versteht man einen Linienzug, der gegebene n Punkte, einen nach dem anderen berührt, und schließlich zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Unter Umständen können sich diese Linien auf ihrem Wege durchkreuzen, wie bei den sogenannten überschlagenen Vielecken. Wir können nun die Frage beantworten, wie viele n-Ecke sich aus gegebenen n Punkten bilden lassen. Da wir bei jedem Polygon von einem beliebigen Anfangspunkt ausgehen können, so können wir auch bei allen diesen Polygonen denselben Anfangspunkt wählen. Die übrigen $(n-1)$ Punkte lassen sich noch in $\Pi(n-1)$ Reihenfolgen durchlaufen. Von diesen aber geben, wenn $n > 2$ ist, je zwei dasselbe Polygon, das vom Ausgangspunkt an in den beiden entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Die übrigen Reihenfolgen aber geben lauter voneinander verschiedene Polygone. Es gibt also $\frac{1}{2}\Pi(n-1)$ Polygone, also z. B. aus drei Punkten ein Dreieck, aus vier Punkten drei Vierecke, aus fünf Punkten zwölf Fünfecke, aus sechs Punkten sechzig Sechsecke u. s. f. Der Leser wird sich leicht an einfachen Skizzen die Lage dieser Polygone klar machen.

§ 49. Gerade und ungerade Permutationen.

1. Wir wollen die Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$, die der Größe nach aufeinander folgen, als Bezeichnung der Elemente nehmen. Unter den Permutationen ist eine:

$$E = 1, 2, 3, \cdots, n,$$

in der die Ziffern in ihrer natürlichen Reihenfolge aufeinander folgen, und diese nennen wir die Hauptpermutation. Irgend eine andere sei

$$A = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n,$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dieselben Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$, nur in irgend einer anderen Reihenfolge, bedeuten.

Für $n = 3$ z. B. haben wir sechs Permutationen:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, 2, 3, & A_4 &= 1, 3, 2, \\ A_2 &= 2, 3, 1, & A_5 &= 2, 1, 3, \\ A_3 &= 3, 1, 2, & A_6 &= 3, 2, 1. \end{aligned}$$

Um eine Permutation A aus der Hauptpermutation E abzuleiten, verfahre man so. Ist 1 von a_1 verschieden, so lasse man in E zunächst 1 mit a_1 den Platz tauschen. Hierauf ist a_1 an die richtige Stelle gekommen und wird nun nicht weiter verstellt. Ist aber schon $a_1 = 1$, so lasse man das erste Element an seiner Stelle. Hat a_1

seinen Platz bekommen, so verfahre man ebenso mit 2 und a_2, und man gelangt dann nach höchstens $n-1$ solchen Umstellungen zu irgend einer vorgeschriebenen Permutation A. Diese Umstellungen von nur zwei Elementen heißen Transpositionen, und es ergibt sich also, daß man jede Permutation durch eine Reihe nacheinander ausgeführten Transpositionen aus der Hauptpermutation ableiten kann. Ebenso kann man aber auch, von jeder andern als der Hauptpermutation ausgehend, durch Transpositionen zu einer vorgeschriebenen Permutation gelangen. Dies kann aber auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen, z. B. so, daß man zuerst blindlings Transpositionen in beliebiger Anzahl ausführt und dann erst planmäßig in der beschriebenen Art fortfährt.

2. Die $n!$ Permutationen der n Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$ lassen sich nach folgendem Gesichtspunkt in zwei Klassen teilen:

Wir bezeichnen es als Inversion, wenn in einer Permutation A eine niedrigere Ziffer an einer späteren Stelle steht als eine höhere. Wenn man also irgend zwei Elemente a_h, a_k aus A herausgreift, so liefern diese, falls $h < k$ ist, eine Inversion, wenn $a_h > a_k$ ist, und keine Inversion, wenn $a_h < a_k$ ist. Es weist also jede Permutation A eine bestimmte Anzahl von Inversionen auf, mit Ausnahme der Hauptpermutation E, die gar keine Inversion hat. Die Permutation $n, n-1, n-2, \cdots, 1$ z. B. hat

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Inversionen, und dies ist die Maximalzahl von Inversionen, die vorkommen kann. In dem Beispiel $n=3$ ist 0, 2, 2, 1, 1, 3 die Anzahl der Inversionen von $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Nach der Anzahl der Inversionen teilen wir nun die Permutationen in zwei Klassen ein:

Gerade Permutationen sind solche, die eine gerade Anzahl (einschließlich Null) von Inversionen haben.

Ungerade Permutationen sind solche, die eine ungerade Anzahl von Inversionen haben.

Bei $n=3$ sind A_1, A_2, A_3 gerade, A_4, A_5, A_6 ungerade Permutationen.

3. Wenn man in einer Permutation A zwei Elemente a_h, a_k mit einander vertauscht, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl. Dies sieht man leicht auf folgende Weise ein: Nehmen wir an, a_h komme in A vor a_k (d. h. $h < k$), so wird durch die Vertauschung von a_h mit a_k in den Inversionen mit den Elementen, die vor a_h oder nach a_k stehen, nichts geändert.

Ist a_l ein Element, das in A zwischen a_h und a_k steht, so bieten die beiden Paare

$$a_h, a_l; \quad a_l, a_k$$

keine, eine oder zwei Inversionen, und die Paare

$$a_k, a_l; \quad a_l, a_h$$

zwei, eine oder keine Inversion, also hat sich die Anzahl dieser Inversionen um zwei vermehrt, nicht geändert, oder um zwei vermindert, also jedenfalls um eine gerade Zahl verändert. Endlich, wenn a_h, a_k eine Inversion bietet, so bietet a_k, a_h keine, und wenn a_h, a_k keine Inversion bietet, so bietet a_k, a_h eine Inversion, also eine Änderung um 1. Damit ist aber unsere Behauptung erwiesen.

Daraus folgt sofort:

4. Die Anzahl der geraden Permutationen ist ebenso groß wie die der ungeraden Permutationen, nämlich $\frac{1}{2}n!$ Denn wenn man in allen Permutationen A irgend zwei Elemente, etwa 1 und 2, miteinander vertauscht, so geht jede gerade Permutation in eine ungerade und jede ungerade in eine gerade Permutation über und niemals zwei verschiedene Permutationen in die gleiche.

5. Wenn man alle Permutationen der n Elemente aus der Hauptpermutation durch wiederholte Transpositionen ableitet, so erhält man, wie man die Operationen auch anordnen mag, die geraden Permutationen durch eine gerade Anzahl, die ungeraden durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen:

Denn jede Transposition ändert ja die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Diese Sätze bilden unter anderem die Grundlage für die Theorie der Determinanten.

§ 50. Komposition der Permutationen.

1. Wenn wir irgend n gegebene Elemente haben, so gibt es, wie wir gesehen haben, $n!$ Permutationen A dieser Elemente Diese Permutationen sind, wenn sie auch keine Zahlgrößen sind, doch einer mathematischen Behandlung zugänglich, und es lassen sich Rechenregeln im Gebiete der Permutationen A festsetzen, die eine gewisse Analogie mit den Regeln der gemeinen Arithmetik haben, in wesentlichen Punkten aber davon abweichen. Diese Rechenoperationen im Gebiete der Permutationen sind von großer Bedeutung für die Algebra,

und da sie zugleich von ganz elementarer Art sind und ein schönes Beispiel für die willkürliche Schöpfung von Zahlbegriffen und Rechenoperationen geben, so wollen wir sie hier in der Kürze betrachten.

2. Um von der Hauptpermutation von n Elementen

$$E = 1, 2, 3, \cdots, n$$

zu einer andern Permutation

$$A = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

zu gelangen, hat man das Element 1 durch a_1, das Element 2 durch $a_2, \ldots$, das Element n durch a_n zu ersetzen. Man nennt diese Operation eine Substitution, und bezeichnet sie übersichtlich in der Weise, daß man das Element, welches für ein anderes zu setzen ist, unter dieses schreibt, also

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir bezeichnen diese Substitution auch durch einen einzigen Buchstaben, etwa S, und nennen (1) die Substitution S. Diese Substitution S führt also von der Hauptpermutation E zu der Permutation A.

Es ist nun offenbar gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die alten Elemente $1, 2, \ldots, n$ durch die neuen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ersetzt, ob man z. B. zuerst 1 durch a_1, dann 2 durch a_2 oder zuerst 2 durch a_2, dann 1 durch a_1 ersetzt, und es kann daher die Substitution S auch so geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & \cdots, & n \\ a_2, & a_1, & a_3, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}$$

oder allgemeiner, man kann die einzelnen Paare von Ziffern in (1) beliebig permutieren, ohne daß die Bedeutung dieses Zeichens sich ändert.

Nehmen wir irgend ein Element b aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ heraus, so geht dieses durch die Substitution S in a_b über, und wenn also

$$B = b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$$

eine beliebige Permutation der n Elemente ist, so können wir S auch so darstellen:

$$S = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & \cdots, & a_{b_n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Substitution S steht aber in einer gewissen ausgezeichneten Beziehung zu der Permutation A, insofern A die Permutation ist, die durch S aus der Hauptpermutation E entsteht.

3. Wenn man die Vertauschungen von S nicht in E, sondern in einer anderen Permutation B macht, so ergibt sich, wie die Darstellung (2) zeigt, eine neue Permutation

$$M = a_{b_1}, a_{b_2}, \cdots, a_{b_n}, \tag{3}$$

die wir mit A_b bezeichnen könnten. Wir ziehen es aber vor, dafür das Zeichen

$$M = BA \tag{4}$$

zu gebrauchen, was an die Multiplikation erinnert, aber natürlich keine wahre Multiplikation ist.

4. Wir haben hier ein Verfahren kennen gelernt, nach dem man aus zwei Permutationen A, B eine bestimmte dritte ableiten kann, also eine Rechenvorschrift im Gebiete der Permutationen. Wir wählen dafür das Zeichen der Multiplikation als das einfachste (das Zeichen der Addition wäre an sich ebenso berechtigt). Um aber Verwechselungen zu vermeiden, wollen wir die Operation nicht Multiplikation sondern Komposition oder Zusammensetzung nennen. Wir heben noch ausdrücklich hervor, daß diese Komposition nur ausführbar ist unter den Permutationen von einer bestimmten Anzahl von Elementen, die während der ganzen Betrachtung eine unveränderte Bedeutung haben.

Um die Zusammensetzung an einem einfachen Beispiel zu erläutern, wollen wir $n = 4$ und

$$A = 1, 3, 4, 2, \quad B = 3, 2, 1, 4$$

annehmen. Um daraus BA zu erhalten, haben wir die Vertauschungen, die von $E = 1, 2, 3, 4$ auf A führen, in B auszuführen. So erhalten wir

$$BA = 4, 3, 1, 2.$$

Ebenso findet sich aber

$$AB = 3, 1, 4, 2.$$

Dieses Beispiel schon zeigt, daß bei der Komposition das kommutative Gesetz nicht, oder wenigstens nicht allgemein, gilt.

5. Es läßt sich nun diese Komposition wiederholen. Ist C eine dritte Permutation, so können wir C mit $M = BA$ zusammensetzen, also $C(BA)$ bilden. Dies ist aber dasselbe wie $(CB)A$, und es gilt also für die Komposition der Permutationen das associative Gesetz.

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die einzelnen Kompositionen nach der Vorschrift 3. zu bilden:

Es sei

$$A = a_1, a_2, \cdots, a_n,$$
$$B = b_1, b_2, \cdots, b_n,$$
$$C = c_1, c_2, \cdots, c_n;$$

dann ist

(5) $$BA = a_{b_1}, a_{b_2}, \cdots, a_{b_n}.$$

Um daraus $C(BA)$ abzuleiten, hat man die durch BA ausgedrückte Vertauschung von E in C auszuführen, d. h. man hat 1 durch a_{b_1}, also c_1 durch $a_{b_{c_1}}$ etc. zu ersetzen und erhält

(6) $$C(BA) = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \cdots, a_{b_{c_n}}.$$

Andererseits ist

$$CB = b_{c_1}, b_{c_2}, \cdots, b_{c_n},$$

und um also $(CB)A$ zu bilden, hat man die Vertauschung, die von E zu A führt, in CB vorzunehmen, also 1 durch a_1, 2 durch a_2 etc. zu ersetzen. Demnach ist b_{c_1} durch $a_{b_{c_1}}$ zu ersetzen, und man erhält wie in (6)

$$(CB)A = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \cdots, a_{b_{c_n}},$$

wodurch das associative Gesetz bewiesen ist. Wir können also in der Bezeichnung die Klammern weglassen und nun die aus A, B, C (in dieser Reihenfolge) komponierte Permutation mit CBA bezeichnen. Ebenso lassen sich Permutationen in beliebiger Zahl komponieren, wobei ein und dieselbe auch mehrmals vorkommen kann.

6. Eine Permutation A bleibt ungeändert, wenn sie mit der Hauptpermutation komponiert wird, gleichviel in welcher Reihenfolge diese Komposition stattfindet, d. h. es ist

$$EA = AE = A.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Komposition, nach der man EA erhält, wenn man die Vertauschung, die von E zu A führt, in E ausführt, d. h. A, und AE die Permutation die man aus A erhält, wenn man darin die Vertauschung macht, die von E zu E führt, d. h. gar keine Vertauschung, also wiederum A selbst.

Es spielt also E bei der Komposition dieselbe Rolle, wie die Einheit bei der Multiplikation (oder die Null bei der Addition), und wenn daher bei der Komposition mehrerer Permutationen die Hauptpermutation vorkommt, so kann diese überall weggelassen werden.

7. Man kann dieselbe Permutation A mehrmals mit sich selbst komponieren und kann das Resultat dieser Kompositionen zweckmäßig nach Art der Potenzen bezeichnen

$$A = A^1, \quad AA = A^2, \quad AAA = A^3, \cdots.$$

Bei diesen Potenzen gilt dann, wie bei den Potenzen von Zahlen, der Grundsatz

(7) $$A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu},$$

wo μ und ν ganze positive Zahlen sind und $A^\mu A^\nu$ die Komposition von A^μ mit A^ν bedeutet. Diese Formel gilt auch noch für $\mu = 0$ und $\nu = 0$, wenn man definitionsweise

$$A^0 = E$$

setzt, was wieder durch die Analogie von E mit der Zahl 1 nahegelegt wird.

8. Zu jeder Permutation A gibt es eine und nur eine A', die der Bedingung

$$A'A = E \tag{8}$$

genügt. Denn soll $BA = E$ sein, so muß nach 3.

$$a_{b_1} = 1, \quad a_{b_2} = 2, \cdots, a_{b_n} = n$$

sein; und da nun die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit den Ziffern $1, 2, \ldots, n$ in einer bestimmten Ordnung übereinstimmen, so sind hierdurch $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eindeutig bestimmt.

Die Permutation A' heißt zu A entgegengesetzt oder reziprok.

9. Die Reziproke von den Reziproken ist wieder die ursprüngliche Permutation A.

Es folgt nämlich aus $A'A = E$:

$$A'AA' = A',$$

und wenn also A'' zu A' reziprok, also $A''A' = E$ ist:

$$A''A'AA' = A''A' = E,$$

folglich auch, wenn man links $A''A' = E$ setzt,

$$AA' = E,$$

d. h. es ist A zu A' reziprok, wie bewiesen werden soll. Betrachtet man wieder E als Einheit, so bezeichnet man zweckmäßig A' als die -1te Potenz von A und setzt also

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{9}$$

10. Darnach lassen sich auch Potenzen mit negativen Exponenten erklären; denn die Gleichung (7) verlangt, wenn wir $\mu = -\nu$ setzen:

$$A^{-\nu}A^\nu = E,$$

d. h. es ist $A^{-\nu}$ die reziproke Permutation von A^ν, und (7) gilt dann auch, wenn μ oder ν negativ sind.

11. Der Begriff der reziproken Permutationen gestattet nun noch die Erklärung einer Operation, die der Division analog ist, im Gebiete der Permutationen. Wenn nämlich in

$$BA = C$$

entweder C und A oder C und B gegeben sind, so erhält man die dritte Permutation B oder A nach den Formeln

$$B = CA^{-1}, \quad A = B^{-1}C,$$

und es ergibt sich der Satz:

Sind A, M, N Permutationen und ist $AM = AN$, so muß M mit N identisch sein. Dies folgt aus

$$A^{-1}AM = A^{-1}AN,$$

und den gleichen Schluß können wir ziehen, wenn $MA = NA$ ist.

§ 51. Darstellung der Permutationen durch Cyklen.

1. Um eine Übersicht über die Mannigfaltigkeit der Permutationen gegebener n Elemente zu gewinnen, und zugleich die Komposition leichter ausführen zu können, dient eine andere Darstellung der Permutation, nämlich durch ihre Cyklen, die wir jetzt noch erklären müssen.

Wir betrachten eine bestimmte Permutation

$$A = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n,$$

und es sei r eine beliebige Nummer aus der Reihe 1, 2, ... n.

An r^{ter} Stelle steht in A das Element a_r,
„ a_r^{ter} Stelle „ „ A „ „ a_{a_r}, das wir mit a_r' bezeichnen,
„ $a_r'^{\text{ter}}$ Stelle „ „ A „ „ $a_{a_r'}$, „ „ „ a_r'' „ u. s. f.

und in der Reihe

$$r, a_r, a_r', a_r'', \ldots$$

ist jedes Element sowohl durch das vorhergehende als durch das folgende eindeutig bestimmt. Da aber die Anzahl der Elemente nicht größer als n ist, so muß in dieser Reihe ein bereits früher dagewesenes Element wiederkehren, und das erste, das zum zweitenmal wiederkehrt, muß r sein, weil eben jedes Glied der Reihe seinen Vorgänger bestimmt. Ist $a_r^{(h-1)} = r$, so ist damit ein Cyklus von h Gliedern geschlossen, den wir so darstellen

$$\mathfrak{C}_1 = (r, a_r, a_r', \ldots a_r^{(h-2)}).$$

Auf das letzte Element $a_r^{(h-2)}$ muß man sich das erste, r, wieder folgen denken.

Es kann vorkommen, daß $h = 1$ ist; dann ist $a_r = r$, und das Element r steht also in A an derselben Stelle wie in E.

Wenn wir statt von r von a_r oder a_r' u. s. w. ausgehen, so erhalten wir die Cyklen

$$(a_r, a_r', \ldots a_r^{(h-2)}, r)$$
$$(a_r', a_r'', \ldots a_r^{(h-2)}, a_r, r) \ldots,$$

die wir als nicht wesentlich verschieden betrachten.

2. Wenn $h < n$ ist, so sind durch $\mathfrak{C}_1$ die Elemente noch nicht erschöpft. Wir nehmen dann eine Ziffer s, die in $\mathfrak{C}_1$ noch nicht enthalten ist, und bilden einen zweiten Cyklus

$$\mathfrak{C}_2 = (s, a_s, a_s', \ldots a_s^{(k-2)})$$

von k Gliedern, und fahren so fort, bis alle Ziffern erschöpft sind. Auf diese Weise kann man die ganze Permutation A in Cyklen auflösen und diese Cyklen sind durch A vollständig bestimmt. Aber auch umgekehrt ist durch die Gesamtheit der Cyklen die Permutation A vollständig bestimmt. Denn in diesen Cyklen ist genau angegeben, welches Element an irgend einer, etwa an s^{ter} Stelle steht. Man kann daher die Permutation A durch die Cyklen eindeutig bezeichnen:

$$A = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots, \tag{1}$$

wobei die Reihenfolge, in der die $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ geschrieben werden, gleichgültig ist.

Die eingliedrigen Cyklen bedeuten Elemente, die in A an ihrer natürlichen Stelle stehen, und diese werden bei der Darstellung (1) gewöhnlich nicht geschrieben, so daß in dieser Darstellung nur die gegen E veränderten Elemente vorkommen. E selbst besteht aus lauter eingliedrigen Cyklen.

Die zweigliedrigen Cyklen sind dasselbe, was wir in § 49 Transpositionen genannt haben.

Beispiel: Es sei $n = 7$ und

$$A = (5, 2, 3)\ (4, 1, 7, 6). \tag{2}$$

Die Permutation A ist dann

$$7, 3, 5, 1, 2, 4, 6,$$

denn die Bedeutung von (2) ist:

an 1. Stelle steht 7 (was auf 1 folgt),
„ 2. „ „ 3,
„ 3. „ „ 5 (was cyklisch auf 3 folgt),
„ 4. „ „ 1,
„ 5. „ „ 2,
„ 6. „ „ 4,
„ 7. „ „ 6.

3. Bei der Darstellung der Permutationen durch Cyklen wird die Ausführung der Komposition vereinfacht. Wir setzen

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n,$$
$$B = b_1, b_2, b_3, \ldots b_n,$$

und wollen

$$BA = a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots a_{b_n}$$

in seine Cyklen auflösen. Ist r ein beliebiges Element, so kommt in den Cyklen von B ein Teil vor

$$(r, b_r, \ldots),$$

ebenso kommt in den Cyklen von A vor

$$(b_r, a_{b_r}, \ldots)$$

und unter den Cyklen von BA

$$(r, a_{b_r}, \ldots).$$

Daraus ergibt sich aber die einfache Vorschrift, daß man, um die Cyklen von BA zu bilden, auf ein beliebiges Element r das Element folgen lassen muß, das in A auf das Element b_r folgt, das in B auf r folgt.

4. Die Übung an einigen beliebig herausgegriffenen Beispielen wird mit diesem Verfahren leicht vertraut machen. Nehmen wir etwa $n = 7$ und

$$A = (5, 2, 3)\ (4, 1, 7, 6),$$
$$B = (1, 2, 4, 7, 3)\ (5, 6),$$

so wird

$$BA = (1, 3, 7, 5, 4, 6, 2)$$

und es hat also BA nur einen Cyklus. Die Permutation BA ist

$$BA = 3, 1, 7, 6, 4, 2, 5.$$

Nehmen wir noch eine Permutation $C = (4, 7)$ hinzu, bei der also 1, 2, 3, 5, 6 an ihrer natürlichen Stelle stehen, so ergiebt sich

$$CBA = (1, 3, 7, 6, 2)\ (4, 5).$$

5. Sehr einfach ist bei der Darstellung durch Cyklen die Bildung der Potenzen einer Substitution. Man hat, um A^2 aus A abzuleiten, in jedem Cyklus immer ein Element zu überspringen. Um A^3 zu erhalten, überspringe man zwei Elemente u. s. f. So ist bei den oben benutzten Beispielen

$$A^2 = (5, 3, 2)\ (4, 7)\ (1, 6)$$
$$A^3 = (5)\ (3)\ (2)\ (4, 6, 7, 1).$$

Man sieht hieraus, daß sich bei der Potenzierung ein Cyklus in zwei oder auch in mehrere zerlegen kann. Wenn man A^{12} bildet, so erhält man die Hauptpermutation.

6. Wenn wir die Permutationen durch Cyklen in der Weise darstellen, daß wir eingliedrige Cyklen nicht schreiben, so stellt jeder Cyklus von h Gliedern für sich eine bestimmte Permutation dar, z. B. bei $n = 7$

$$(5, 3, 2) = 1, 5, 2, 4, 3, 6, 7$$

und dann hat das Nebeneinanderstellen verschiedener Cyklen, die kein gemeinsames Element enthalten, genau die Bedeutung der Komposition im früheren Sinne.

Wenn wir den einen Cyklus $(1, 2, 3, \dots h-1)$ komponieren mit einer Transposition $(h, h-1)$, so ergibt sich:

$$(h, h-1)(1, 2, 3, \dots h-1) = (1, 2, 3, \dots, h-1, h),$$

und daraus folgt, daß man einen Cyklus von h Gliedern auflösen kann in $h-1$ Transpositionen:

$$(1, 2, 3, \dots h) = (h, h-1)(h-1, h-2) \dots (2, 1),$$

worin die Zusammenstellung auf der rechten Seite die Bedeutung der Komposition hat.

Man schließt hieraus, daß ein Cyklus zu einer **geraden** oder einer **ungeraden** Permutation gehört, je nachdem die Gliederzahl des Cyklus ungerade oder gerade ist.

Hat man also irgend eine Permutation in ihre Cyklen aufgelöst, so gehört die Permutation zu den geraden oder zu den ungeraden, je nachdem die Anzahl der Cyklen mit gerader Gliederzahl gerade oder ungerade ist.

§ 52. Permutationsgruppen.

1. Wir haben in § 50 gesehen, was man im Sinne der Komposition unter den Potenzen $A^2, A^3, \dots$ einer Permutation A zu verstehen hat. Da die Anzahl der Permutationen von n Dingen aber endlich ist, so muß in der Reihe

$$A, A^2, A^3, A^4, \dots$$

ein früher schon dagewesenes Element endlich wiederkehren. Wenn eine dieser Potenzen A^k zum erstenmale mit dem Exponenten $k+\alpha$ wiederkehrt, so ist

$$A^k = A^{k+\alpha},$$

und daraus folgt

$$A^\alpha = E.$$

Es gibt also für jede Permutation A einen gewissen kleinsten positiven Exponenten α, für den A^α die Hauptpermutation ist.

Dieser kleinste positive Exponent heißt der Grad der Permutation A. Die Reihe

$$E, A, A^2, A^3, \dots A^{\alpha-1}$$

enthält lauter voneinander verschiedene Permutationen und die Reihe

der aufeinander folgenden Potenzen von A besteht aus einer unendlichen Wiederholung dieser Reihe, die darum die **Periode** von A genannt wird. Erhebt man A in eine Potenz, deren Exponent ein Vielfaches von α ist, so erhält man immer E.

2. Ein aus der Gesamtheit der Permutationen von n Elementen herausgegriffenes System $\mathfrak{G}$

$$(\mathfrak{G}) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots A_g$$

heißt eine Permutationsgruppe, wenn es der folgenden Bedingung genügt:

Sind A_h, A_k irgend zwei Permutationen aus $\mathfrak{G}$, oder auch zweimal dieselbe, so gehört die nach dem Kompositionsgesetz gebildete Permutation

$$A_h A_k = A_l$$

ebenfalls zu dem System $\mathfrak{G}$.

Ist g die Anzahl der Permutationen, die in $\mathfrak{G}$ vorkommen, so heißt g der Grad der Gruppe.

Die Gesamtheit aller Permutationen der n Elemente ist nach dieser Definition eine Gruppe, und zwar vom Grade $n!$.

Es gibt aber auch noch engere Gruppen, und die Bildung und Erforschung dieser Gruppen ist eine besonders für die Algebra fundamentale Aufgabe.

Eine Gruppe vom Grade α ist z. B. die Periode von A, denn wie man auch die Potenzen von A komponieren mag, man kommt immer nur zu Potenzen von A.

Endlich sei noch die Gesamtheit aller geraden Permutationen der n Elemente als Gruppe vom Grade $\frac{1}{2}n!$ angeführt.

3. Wenn in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Element A (vom Grade α) vorkommt, so kommen auch alle Potenzen von A, zunächst die mit positiven Exponenten, darin vor, folglich auch $A^\alpha = E$.

Jede Gruppe enthält also die Hauptpermutation E, und die Hauptpermutation E bildet für sich eine Gruppe vom Grade 1.

Nach der Erklärung der Potenzen mit negativem Exponenten:

$$A^{-k} A^k = E,$$

ist $A^{-k} = A^{\alpha - k}$, und daraus folgt, daß, wenn A in der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorkommt, auch A^{-k}, d. h. die zu A reziproke Permutation, darin enthalten sein muß.

4. Wenn in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Grade g die sämtlichen Elemente einer anderen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade h enthalten sind, so ist h ein Teiler von g.

Dieser wichtige Satz läßt sich so beweisen:

Es sei

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_h \tag{1}$$

die Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Elemente nach der Voraussetzung alle in $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Sie mögen die Gruppe $\mathfrak{G}$ noch nicht vollständig erschöpfen, und es sei A eine in $\mathfrak{G}$, aber nicht in $\mathfrak{H}$ enthaltene Permutation. Wir bilden durch Komposition das System

$$AB_1,\ AB_2,\ \ldots\ AB_h, \tag{2}$$

dessen Permutationen alle in $\mathfrak{G}$ enthalten sind und beweisen, daß die h Permutationen (2) nicht nur untereinander, sondern auch von den h Permutationen (1) verschieden sind. Denn wäre etwa $AB_r = AB_s$, so folgt nach § 50, 11. $B_r = B_s$, und wäre $AB_r = B_s$, so wäre $A = B_s B_r^{-1}$, also A in $\mathfrak{H}$ enthalten, gegen die Voraussetzung.

Demnach enthalten (1) und (2) zusammengenommen $2h$ Permutationen von $\mathfrak{G}$. Wenn damit die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht erschöpft ist, so kann man ein Element A' aus $\mathfrak{G}$ nehmen, das weder in (1) noch in (2) vorkommt, und die Reihe

$$A'B_1,\ A'B_2,\ \ldots\ A'B_h \tag{3}$$

bilden, deren Elemente wieder 1.) alle in $\mathfrak{G}$ enthalten sind, 2.) alle untereinander verschieden sind, 3.) alle von den Permutationen (1) und (2) verschieden sind. Denn wäre etwa $A'B_r = AB_s$, so würde folgen $A' = AB_s B_r^{-1}$ und es würde also, da $B_s B_r^{-1}$ ein B ist, A' gegen die Voraussetzung in (2) vorkommen. Demnach haben wir in (1), (2), (3) zusammen $3h$ Permutationen aus $\mathfrak{G}$. Und damit können wir, da die Anzahl der Permutationen von $\mathfrak{G}$ endlich ist, so lange fortfahren, bis die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ erschöpft ist. Ist die letzte Reihe, die wir so gebildet haben,

$$A^{(k-2)}B_1,\ A^{(k-2)}B_2,\ \ldots\ A^{(k-2)}B_h, \tag{4}$$

so ist

$$g = hk.$$

Hierin liegt der Beweis unseres Satzes.

Es ergibt sich daraus als spezielle Anwendung: Der Grad einer Permutationsgruppe und der Grad irgend eines Elementes ist immer ein Teiler von $n!$.

Für jede Permutation A ist $A^{n!} = E$.

5. Es ist leicht, für jedes n gewisse einfache Gruppen von niedrigem Grade zu bilden, z. B. die Perioden der einzelnen Permutationen. Von weit größerem Interesse besonders für die Algebra sind die Gruppen von den höheren Graden, und in der Bildung solcher

Gruppen liegt ein großes wichtiges Problem, von dessen vollständiger Lösung wir noch weit entfernt sind. Verhältnismäßig einfach ist aber der Bau der Gruppen in den ersten Fällen $n = 3$, $n = 4$ zu überschauen.

Wir bedienen uns zur Bezeichnung der Permutationen der Darstellung durch die Cyklen, und bezeichnen überdies der Einfachheit halber die Hauptpermutation E, die bei der Komposition als Einheit wirkt, mit (1).

Wir haben dann für $n = 3$ die 6 Permutationen

$$(1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2).$$

Darin ist enthalten die Gruppe der geraden Permutationen

$$(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)$$

vom Grade 3, die zugleich die Periode von (1, 2, 3) oder von (1, 3, 2) ist; ferner aber drei Gruppen vom zweiten Grade, die der Perioden von (1, 2), (1, 3), (2, 3). Weitere Gruppen sind nicht darin enthalten.

6. Für $n = 4$ haben wir 24 Permutationen, die wir folgendermaßen durch die Cyklen darstellen können:

(1). Hauptpermutation.

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) zweigliederige Cyklen,

(1, 2) (3, 4), (1, 3) (2, 4), (1, 4) (2, 3) je zwei zweigliederige Cyklen,

(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3)
(1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2) dreigliederige Cyklen,

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4)
(1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2) viergliederige Cyklen,

und damit sind alle 24 Permutationen der vier Elemente erschöpft.

Die Gruppe der 12 geraden Permutationen ist

$$(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3),$$
$$(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3),$$
$$(1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2).$$

Darin ist eine Gruppe vom Grade 4 enthalten:

$$(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3).$$

Diese letztere Gruppe ist von besonderer Bedeutung für die Auflösung der Gleichung vierten Grades, und eine ähnliche Rolle spielen drei Gruppen 8ten Grades, die in der ganzen Gruppe 24ten Grades enthalten sind; deren eine ist:

$$(1),\quad (1, 2)\,(3, 4),\ (1, 3)\,(2, 4),\ (1, 4)\,(2, 3),$$
$$(1, 2),\quad (3, 4),\quad (1, 4, 2, 3),\quad (1, 3, 2, 4),$$

aus der man die beiden anderen durch Vertauschung von 1 mit 3 und von 1 mit 4 erhält.

§ 53. Kombinationen ohne Wiederholung.

1. Es sei eine Menge N von n Elementen gegeben. Man soll aus dieser Menge m Elemente herausgreifen. Auf wie viele verschiedene Arten ist dies möglich? Oder, etwas anders ausgedrückt, wie viele verschiedene Mengen M von der Zahl m lassen sich aus den Elementen einer Menge von der Zahl n bilden?

Die Mengen M heißen die Kombinationen der Elemente von N zu je m, und um auszudrücken, daß ein und dasselbe Element von N nicht zweimal in einer Menge M vorkommen soll, nennt man die M auch die Kombinationen ohne Wiederholung.

Es handelt sich also um die Bestimmung der Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zu je m.

Wir bezeichnen diese Zahl durch das Zeichen $B_m^{(n)}$. Die Frage, die wir gestellt haben, hat nur so lange einen klaren Sinn, als m nicht größer als n ist. Ist $n = m$, so gibt es nur eine Menge M, nämlich N selbst, und folglich ist

$$B_n^{(n)} = 1. \tag{1}$$

Ein anderer Fall läßt sich auch noch leicht erledigen, nämlich $m = 1$. Für diesen Fall sind die Kombinationen, die wir suchen, die einzelnen Elemente von N selbst, und folglich

$$B_1^{(n)} = n. \tag{2}$$

Nehmen wir als ein weiteres Beispiel $n = 3$, so können wir aus den Elementen a, b, c die Kombinationen bilden:

$$\begin{array}{lllll} m = 1: & a, & b, & c; & B_1^{(3)} = 3, \\ m = 2: & bc, & ca, & ab; & B_2^{(3)} = 3, \\ m = 3: & & abc; & & B_3^{(3)} = 1. \end{array}$$

Es läßt sich leicht auch für die nächsten Fälle $n = 4, 5, 6$ die Zahl $B_m^{(n)}$ durch wirkliche Abzählung ermitteln. Wir bestimmen diese Zahl allgemein auf folgendem Wege.

Wenn wir die sämtlichen Permutationen der Menge N bilden und aus jeder dieser Permutationen die m ersten Elemente herausgreifen, so erhalten wir gewiß alle Mengen M, die möglich sind, aber jede von ihnen nicht bloß einmal, sondern mehrmals. Um zu

übersehen, wie oft jede dieser Mengen M auf diesem Wege gebildet wird, sei

$$A = a_1, a_2, \cdots a_m \,|\, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots a_n$$

eine der Permutationen von N, die, wie es durch den Strich angedeutet wird, in zwei Teile A_1 und A_2 zerlegt ist:

$$A_1 = a_1, a_2, \cdots a_m, \quad A_2 = a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots a_n.$$

Wenn wir aus allen A die Elemente A_1 herausnehmen, so erhalten wir die gesuchten Mengen M. Aber wir bekommen dieselbe Menge M, wenn wir die Elemente von A_1 für sich oder die Elemente von A_2 für sich irgend einer Permutation unterwerfen, während wir eine andere Menge M aus den Permutationen erhalten, in denen einige der Elemente von A_1 durch solche aus A_2 ersetzt sind. Wir erhalten also jede Menge M so oft als es möglich ist, eine Permutation von A_1 mit einer Permutation von A_2 zu verbinden, d. h. $m!\,(n-m)!$ mal. Da nun die Gesamtzahl aller A gleich $n!$ und die Gesamtzahl aller M gleich $B_m^{(n)}$ ist, so ist

$$m!\,(n-m)!\,B_m^{(n)} = n!$$

und folglich

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \tag{3}$$ [1]

und mit Hilfe der Formel § 48, (3) läßt sich dieser Ausdruck in jeder der beiden Formen darstellen:

$$B_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-m)} \tag{4}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}.$$

Die $B_m^{(n)}$, die sich durch diese Ausdrücke in Form von Brüchen darstellen, sind aber, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, ganze Zahlen, und es ist also der Zähler durch den Nenner teilbar. Nach der zweiten Darstellung (4) können wir diesem Satz auch den Ausdruck geben:

Das Produkt von irgend m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch das Produkt der m ersten Zahlen teilbar.

Die Formel (3) zeigt, daß sich $B_m^{(n)}$ nicht ändert, wenn man m mit $n-m$ vertauscht, also ist

$$B_m^{(n)} = B_{n-m}^{(n)}. \tag{5}$$

---

1) Für die Zahlen $B_m^{(n)}$ werden häufig auch die Zeichen $\binom{n}{m}$ (spr. „n über m“) oder n_m gebraucht. Das Zeichen $B_m^{(n)}$ erinnert an den Namen „Binomialkoeffizienten“, den diese Zahlen aus einem später angegebenen Grunde führen.

Bei der Ableitung der Formeln (3) und (5) war zunächst stillschweigend vorausgesetzt, daß $m < n$ sei. Sollen sie noch für $n = m$ gelten, so müssen wir definitionsweise setzen:

$$0! = 1, \quad B_0^{(n)} = 1, \tag{6}$$

und dann gilt die Formel (3) auch für $m = 0$.

2. Wir können die Zahlen $B_m^{(n)}$ noch auf einem andern Wege bestimmen, auf dem wir noch einige weitere Eigenschaften dieser Zahlen kennen lernen werden.

Wenn wir zu den n Elementen $a_1 a_2 \ldots a_n$ der Menge N noch ein Element a_{n+1} hinzufügen, so erhalten wir eine Menge N' von $n + 1$ Elementen

$$N' = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1}.$$

Unter den Kombinationen M' dieser Elemente zu je m sind zunächst die Kombinationen M der Menge N enthalten, dann aber noch die, die man erhält, wenn man zu den Kombinationen der Menge N zu $m - 1$ Elementen das eine Element a_{n+1} hinzufügt. Diese Erwägung liefert sofort die Rekursionsformel:

$$B_m^{(n+1)} = B_m^{(n)} + B_{m-1}^{(n)}.\text{[1]} \tag{7}$$

Hieraus können, wenn die $B_m^{(n)}$ für alle $m \overline{\gtrless} n$ bekannt sind, die $B_m^{(n+1)}$ für $m \overline{\gtrless} n + 1$ berechnet werden, wenn wir noch $B_0^{(n)} = 1$, $B_n^{(n)} = 1$ hinzufügen. Durch die Relation (7) und durch die Werte

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_n^{(n)} = 1 \tag{8}$$

ist also $B_m^{(n)}$ eindeutig bestimmt. Da nun der Ausdruck (3) wie man durch Einsetzen leicht erkennt, den Bedingungen (7), (8) genügt, so ist die Richtigkeit damit aufs neue bewiesen.

Wir können aus (7) einen direkten Beweis dafür ableiten, daß die $B_m^{(n)}$ ganze Zahlen sind. Denn für die ersten Werte von n zeigt es die direkte Rechnung, und dann folgt es für jedes n aus (7) durch die vollständige Induktion.

Die Rekursionsformel (7) gestattet noch schneller als die allgemeine Formel (3), die $B_m^{(n)}$ successive zu berechnen, wenn man aus der Reihe der $B_m^{(n)}$ die Reihe der $B_m^{(n+1)}$ dadurch herleitet, daß man je zwei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, z. B. für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

---

1) Diese Formel würde für $m = 0$ dann gelten, wenn wir $B_m^{(n)}$ für ein negatives m gleich Null setzen wollten, und dann würde sie sogar für beliebige negative m gelten. Ebenso könnten wir $B_m^{(n)} = 0$ setzen, wenn $m > n$ ist, und dann würde unsere Formel für jedes beliebige ganzzahlige m und n gelten.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

3. Auch hiervon läßt sich eine geometrische Anwendung machen auf die Beantwortung der Frage:

Es ist ein System N von n Punkten gegeben und eine Zahl m, die kleiner ist als n; wie viele m-Ecke lassen sich aus diesen n Punkten zusammenstellen?

Zunächst kann man $B_m^{(n)}$ Systeme M von m Punkten bilden, von denen jedes nach § 48 auf $\frac{1}{2}(m-1)!$ Arten zu einem m-Eck geordnet werden kann. Demnach ist die Gesamtzahl der aus N zu bildenden m-Ecke

$$\frac{1}{2}(m-1)!\,B_m^{(n)} = \frac{1}{2}\frac{n!\,(m-1)!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2m}.$$

§ 54. Kombinationen mit Wiederholung.

Wir erweitern die in § 53 gelöste Aufgabe nun in der Weise:

1. Es sei gegeben eine Menge N von n Elementen:

$$N = a_1\,a_2\cdots a_n$$

wie vorher; es sind daraus Mengen M von je m Elementen zu bilden, die zwar nur Elemente von N, darunter aber auch dasselbe mehrmals, enthalten dürfen.

Diese Mengen M heißen die Kombinationen von n Elementen zu je m mit Wiederholung. — Die Anzahl dieser Kombinationen, die wir mit $C_m^{(n)}$ bezeichnen, ist zu bestimmen.

Hier ist nun die Beschränkung nicht mehr nötig, daß m kleiner als n sei. Es können vielmehr m und n beliebige positive ganze Zahlen sein.

Setzen wir $m = 1$, so haben wir jedes Element von N einmal zu nehmen, und es folgt

$$C_1^{(n)} = n. \tag{1}$$

Nehmen wir $n = 1$, so haben wir nur ein M, nämlich das,

welches aus der m-maligen Wiederholung des einen Elementes von N besteht, also

(2) $$C_m^{(1)} = 1.$$

Nehmen wir $n = 2$ und m beliebig, so enthält N nur zwei Elemente a, b, und wenn wir die k-malige Wiederholung eines Elementes der Kürze wegen durch eine Potenz a^k andeuten, so erhalten wir die Kombinationen

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ \cdots,\ ab^{m-1},\ b^m.$$

Es ergibt sich also

(3) $$C_m^{(2)} = m + 1.$$

Eine direkte Bestimmung von $C_m^{(n)}$, wie in § 53, 1., stößt hier auf Schwierigkeiten; dagegen führt uns das rekurrierende Verfahren von § 53, 2. leichter zum Ziel.

2. Wir fügen zu N noch ein Element a_{n+1} hinzu, leiten also aus N eine Menge N' von der Zahl $n + 1$ ab:

$$N' = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}.$$

Unter den Kombinationen M' dieser Elemente zu je m mit Wiederholung sind zunächst alle die Mengen M enthalten, deren Anzahl $C_m^{(n)}$ ist. Damit sind alle die Kombinationen M' erschöpft, die das neue Element a_{n+1} nicht enthalten. Wenn man aus den übrigen, die das Element a_{n+1} ein- oder mehrmals enthalten, dieses Element einmal wegnimmt, so bleiben alle Kombinationen mit Wiederholung der Menge N' zu je $m - 1$, und nur diese übrig, deren Zahl $C_{m-1}^{(n+1)}$ beträgt. Daraus ergibt sich also die Relation:

(4) $$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}.$$

Wenn wir in der Formel (4) m durch $m - 1$, $m - 2$, $\cdots$, 2 ersetzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} C_m^{(n+1)} &= C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}, \\ C_{m-1}^{(n+1)} &= C_{m-2}^{(n+1)} + C_{m-1}^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C_2^{(n+1)} &= C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)}, \end{aligned}$$

und wenn wir alle diese Gleichungen addieren und dann die gleichen Größen $C_{m-1}^{(n+1)}, \ldots C_2^{(n+1)}$ auf beiden Seiten weglassen:

(5) $$C_m^{(n+1)} - C_1^{(n+1)} = C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)},$$

und da $C_1^{(n+1)} = (n + 1)$, $C_1^{(n)} = n$ ist (nach (1)), so kann man dafür auch setzen:

(6) $$C_m^{(n+1)} = 1 + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)},$$

und hierdurch sind die $C_m^{(n+1)}$ vollständig bestimmt, wenn für ein bestimmtes n alle $C_m^{(n)}$ bekannt sind. Nun sind aber die $C_m^{(1)}$ nach (2) alle $= 1$, und folglich sind durch die Formeln (1), (2) und (4) die $C_m^{(n)}$ eindeutig bestimmt.

Diesen Bedingungen genügt aber

$$C_m^{(n)} = B_m^{(m+n-1)}, \tag{7}$$

denn durch diese Annahme gehen die Gleichungen (1), (2) und (4) über in

$$B_1^{(n)} = n, \quad B_m^{(m)} = 1, \quad B_m^{(m+n)} = B_{m-1}^{(m+n-1)} + B_m^{(m+n-1)},$$

die nach § 53, (1), (2) und (7) erfüllt sind. Nach § 53, (3) ergibt sich also

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}, \tag{8}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} \tag{9}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}.$$

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

§ 55. Der binomische Lehrsatz.

1. Die Kombinationen von n Elementen ohne Wiederholung treten auf, wenn es sich um die Multiplikation von n binomischen Faktoren handelt.

Nehmen wir an, es seien $x, a_1, a_2, \ldots a_n$ allgemeine Zeichen für irgend welche Zahlen, und es handle sich um die Bildung des Produktes der n Faktoren

$$(1) \qquad F_n = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \cdots (x + a_n)$$

nach den Sätzen § 9. Es ist für $n = 2$ und $n = 3$

$$F_2 = x^2 + x(a_1 + a_2) + a_1 a_2,$$
$$F_3 = x^3 + x^2(a_1 + a_2 + a_3) + x(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3,$$

und durch Anwendung der vollständigen Induktion erhält man allgemein

$$(2) \qquad F_n = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n,$$

wenn A_1 die Summe der Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$; A_2 die Summe der Produkte zu je zweien, A_3 die Summe der Produkte zu je dreien u. s. f. und endlich A_n das Produkt aller $a_1, a_2, \ldots a_n$ bedeutet. Wir wollen dies, indem wir das Zeichen Σ (Summe) anwenden, so darstellen:

$$(3) \qquad A_1 = \Sigma a_1, \quad A_2 = \Sigma a_1 a_2, \quad A_3 = \Sigma a_1 a_2 a_3, \cdots,$$
$$A_n = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Denken wir uns für die $a_1, a_2, \ldots a_n$ bestimmte gegebene Zahlen gesetzt, während x als ein Zeichen betrachtet wird, das jede beliebige Zahl bedeuten kann, so heißt der Ausdruck F_n eine ganze Funktion von x vom Grade n. Die Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_n$ heißen die Koeffizienten dieser Funktion.

2. In den Ausdrücken $A_1, A_2, \ldots A_n$ kommen in den einzelnen Summanden die Kombinationen ohne Wiederholung zu je einem, zwei, drei u. s. w. der n Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ vor. Die Gliederzahlen, die diese Summen bilden, sind daher

$$B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, B_3^{(n)}, \ldots B_n^{(n)}.$$

Von besonderem Interesse ist uns hier der Fall, daß die $a_1, a_2, \ldots a_n$ alle einander gleich sind. Ist ihr gemeinsamer Wert a, so ergibt sich

$$A_1 = B_1^{(n)} a,\ A_2 = B_2^{(n)} a^2,\ A_3 = B_3^{(n)} a^3, \cdots, A_n = a^n,$$

und aus (1) und (2) folgt die Formel:

$$(4)\quad (x+a)^n = x^n + B_1^{(n)} x^{n-1} a + B_2^{(n)} x^{n-2} a^2 + \cdots + B_{n-1}^{(n)} x a^{n-1} + a^n.$$

Diese Formel, die sehr häufig angewandt wird, heißt der binomische Lehrsatz. Sie dient dazu, die n^{te} Potenz eines Binomes $(x+a)^n$ nach Potenzen von x und a zu ordnen. In der Formel (4) ist nach absteigenden Potenzen von x und aufsteigenden Potenzen von a geordnet.

Die Formel lautet, explicite geschrieben:

$$(5)\quad \begin{aligned} (x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} a^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} a^3 + \cdots \end{aligned}$$

und für die ersten Fälle $n = 2, 3, 4, 5$:

$$(6)\quad \begin{aligned} (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2, \\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3, \\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4, \\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5. \end{aligned}$$

Setzt man $x = 1$, so ergibt die Formel (5)

$$(7)\quad (1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \cdots + a^n,$$

und hieraus erhält man auch wieder leicht die allgemeine Formel, weil $(x+a)^n = x^n \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n$ ist.

Wegen dieses Auftretens in dem binomischen Lehrsatz werden die Zahlen

$$B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, B_3^{(n)}, \ldots B_{n-1}^{(n)}, B_n^{(n)}$$

auch die Binomialkoeffizienten genannt[1]).

---

1) Die erste Kenntnis der Binomialkoeffizienten findet sich bei Michael Stifel (Arithmetica integra, 1544), woselbst eine Tabelle der Binomialkoeffizienten bis zur 17ten Potenz angegeben ist (Cantor, Gesch. d. Math., Bd. 2, S. 430).

3. Wenn n eine Primzahl ist, so sind die Binomialkoeffizienten, mit Ausnahme des ersten und des letzten, also

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots\ B_{n-1}^{(n)}$$

alle durch n teilbar; denn aus § 53, (3) folgt

$$B_m^{(n)} m!\,(n-m)! = n!. \tag{8}$$

Ist nun m größer als 0 und kleiner als n, so ist $m!$ und $(n-m)!$ nicht durch n teilbar, während $n!$ durch n teilbar ist. Folglich muß $B_m^{(n)}$ durch n teilbar sein (§ 16, 1.). Demnach ergibt sich aus (7), daß, wenn a eine ganze Zahl ist:

$$[(a+1)^n - (a+1)] - (a^n - a) \tag{9}$$

durch n teilbar ist. Setzen wir $a = 1$, so folgt, daß $2^n - 2$ durch n teilbar ist, und wenn wir also annehmen, es sei bereits bewiesen, daß $a^n - a$ für irgend ein a durch n teilbar sei, so folgt aus (9) das Gleiche für $(a+1)^n - (a+1)$. Damit ist der Fermatsche Lehrsatz[1]) durch vollständige Induktion bewiesen:

Ist a eine beliebige ganze Zahl und n eine Primzahl, so ist $a^n - a$ durch n teilbar.

4. Wir können die beiden Formeln

$$(1+a)^m = B_0^{(m)} + B_1^{(m)} a + B_2^{(m)} a^2 + \cdots + B_m^{(m)} a^m,$$
$$(1+a)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} a + B_2^{(n)} a^2 + \cdots + B_n^{(n)} a^n,$$

in denen m und n zwei beliebige ganze Zahlen sind, miteinander multiplizieren und erhalten

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m)} B_0^{(n)} + (B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)})\, a$$
$$+ (B_0^{(m)} B_2^{(n)} + B_1^{(m)} B_1^{(n)} + B_2^{(m)} B_1^{(n)})\, a^2 + \cdots.$$

Diese Summe muß aber auch gleich

$$B_0^{(m+n)} + B_1^{(m+n)} a + B_2^{(m+n)} a^2 + \cdots$$

sein. Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke führt zu den folgenden Relationen zwischen den Binomialkoeffizienten:

$$B_0^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_0^{(n)},\ B_1^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)},\ \cdots$$

oder allgemein, für irgend ein ν,

$$B_\nu^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_\nu^{(n)} + B_1^{(m)} B_{\nu-1}^{(n)} + B_2^{(m)} B_{\nu-2}^{(n)} + \cdots B_\nu^{(m)} B_0^{(n)}. \tag{10}$$

Hierin ist $B_\nu^{(n)} = 0$ zu setzen, wenn $\nu > n$ ist. Von dieser Formel werden wir später eine sehr wichtige Anwendung machen.

---

1) Fermat, einer der größten Zahlentheoretiker, lebte von 1601 bis 1665 und war Parlamentsrat in Toulouse, also nicht Mathematiker von Beruf, sondern juristischer Beamter. Er hat uns in Randbemerkungen zu einer von ihm gemachten Übersetzung des Diophant tiefe arithmetische Sätze hinterlassen, deren Beweise zum Teil heute noch nicht gefunden sind.

§ 56. Arithmetische Reihen.

1. Eine geordnete Reihe von Zahlen, deren jede folgende um dieselbe Zahl größer ist als die vorhergehende, bilden eine arithmetische Progression oder eine arithmetische Reihe (§ 35, 1.).

Wir können die arithmetische Progression auch definieren als eine Zahlenreihe, in der die Differenz zweier aufeinander folgender Zahlen unveränderlich oder konstant ist. Diese konstante Differenz heißt auch die Differenz der arithmetischen Reihe.

So bilden die natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1, die geraden oder die ungeraden Zahlen für sich eine arithmetische Reihe mit der Differenz 2, die Zahlenreihe 1, 4, 7, 10, 13, ... oder 2, 5, 8, 11, 14, ... oder 0, 3, 6, 9, 12, ... arithmetische Progressionen mit der Differenz 3 u. s. f. Die Zahlen einer solchen Reihe können aber auch gebrochen und negativ sein, und ebenso braucht die Differenz keine ganze Zahl zu sein. Ist die Differenz positiv, so heißt die Reihe steigend, ist sie negativ, fallend oder absteigend.

Die allgemeine Form einer arithmetischen Progression ist, wenn a und b beliebige Zahlen sind:

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \quad a+3b, \quad a+4b, \cdots;$$

a ist das Anfangsglied, b die Differenz.

Wenn x ein Zeichen ist, das der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, ... annimmt, so ist $a + bx$ das allgemeine Glied einer solchen Reihe.

2. Oft bietet sich die Aufgabe, die Summe von n aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe zu bestimmen. Das kann kürzer als durch wirkliche Ausführung der Addition geschehen mittels einer allgemeinen Formel, die wir jetzt ableiten wollen. Nehmen wir an, es handle sich um die Summe der n ersten Zahlen einer arithmetischen Progression:

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + (n-1)b),$$

so ergibt sich dafür

$$S = na + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))b, \tag{1}$$

und wir haben also zunächst einen speziellen Fall der allgemeinen Aufgabe zu lösen, die Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \tag{2}$$

zu finden. Diese läßt sich aber einfach aus der Bemerkung ableiten, daß je zwei Glieder, die gleich weit vom Anfang und vom Ende ab-

stehen, wie 1 und $(n-1)$ oder 2 und $(n-2)$ oder 3 und $(n-3)$, immer dieselbe Summe n ergeben. Ist also $n-1$ eine gerade Zahl, so zerfallen die Glieder der Summe s in $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare, deren Summe n ist, und mithin ist

$$s = \frac{(n-1)\,n}{2}. \tag{3}$$

Ist aber $n-1$ ungerade, also n gerade, so haben wir nur $\frac{1}{2}(n-2)$ solche Paare, während das mittelste Glied, das den Wert $\frac{1}{2}n$ hat, vereinzelt bleibt. Es ist also jetzt

$$s = \frac{n\,(n-2)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

und die Formel (3) gilt also auch für diesen Fall. Aus (1) ergibt sich dann für S:

$$S = n\left(a + \frac{n-1}{2}\,b\right), \tag{4}$$

und man erhält z. B. hieraus die Summe der n ersten ungeraden Zahlen, wenn man $a = 1$, $b = 2$ setzt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

3. Die Zahlen $\frac{1}{2}n\,(n+1)$ stellen sich z. B. bei folgender Aufgabe ein: Es sollen Kugeln (z. B. Billardkugeln) in einem Dreieck so angeordnet werden, daß sie in Reihen liegen, von denen die erste eine, die zweite zwei, die dritte drei, ... die n^{te} Reihe n Kugeln enthält. Wieviel Kugeln enthält das ganze Dreieck? Die Gesamtzahl dieser Kugeln wird nach der Formel (4), in der $a = 1$, $b = 1$ zu setzen ist, durch die Zahl

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

dargestellt, und aus diesem Grunde heißen diese Zahlen Dreieckszahlen oder Trigonalzahlen. Die Dreieckszahlen sind der Reihe nach

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

Ordnen wir die Kugeln in ein Quadrat, so daß in jeder Reihe soviel Kugeln liegen als Reihen vorhanden sind, so erhält man die Viereckszahlen oder die Quadratzahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$$

Aus der Formel

$$\frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n-1)}{2} = n^2 \tag{5}$$

ersieht man die Regel, daß die Summe der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Dreieckszahl die n^{te} Viereckszahl ist, was auch die geometrische Anschauung zeigt.

§ 57. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Betrachten wir irgend eine Reihe A von Zahlen, die nach einem gegebenen Gesetz fortschreiten,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

und bilden die Differenz je zweier aufeinander folgender Glieder

$$b_0 = a_1 - a_0, \quad b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \cdots,$$

so heißt die Reihe B der b, also

$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

die Reihe der Differenzen von der Reihe A.

Aus dieser können wir wieder die Differenzen bilden:

$$c_0 = b_1 - b_0, \quad c_1 = b_2 - b_1, \cdots$$

und erhalten eine Reihe C

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

die die Reihe der zweiten Differenzen von A heißt, und auf diese Weise können wir fortfahren und die Reihe der dritten, vierten, ... Differenzen bilden.

Durch Addition der Glieder der Reihe B ergibt sich

$$a_n - a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1},$$

und es ist also das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe A gleich der Summe der n ersten Glieder der Reihe B, vermehrt um das Anfangsglied a_0.

Die Reihe A ist eine arithmetische, wenn die Glieder der Reihe B alle einander gleich (konstant) sind. Ist aber B selbst eine arithmetische Reihe, so heißt A eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Wir definieren allgemein eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung dadurch, daß die Reihe ihrer ersten Differenzen eine arithmetische Reihe $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und daraus ergibt sich, daß bei einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung die Glieder der k^{ten} Differenzenreihe konstant sind.

Die Reihe der Dreieckszahlen ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung.

2. Man kann die allgemeine Form der Glieder einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung leicht durch die Binomialkoeffizienten $B_m^{(n)}$ darstellen.

Es ist nämlich das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied a_n einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung ein Ausdruck von der Form:

$$(1) \qquad a_n = \alpha_0 + \alpha_1 B_1^{(n)} + \alpha_2 B_2^{(n)} + \cdots + \alpha_k B_k^{(n)},$$

worin die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ von n unabhängig sind. Die einzelnen Progressionen der k^{ten} Ordnung unterscheiden sich voneinander durch die Werte der α.

Der Beweis dieses Gesetzes ergibt sich sehr einfach durch die vollständige Induktion. Die Formel ist nämlich offenbar richtig für $k = 1$, denn die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung sind von der Form $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$. Wir nehmen also die Richtigkeit für die Reihe $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als erwiesen an.

Es sei nun A die gegebene arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung und B die Reihe ihrer ersten Differenzen, von der wir also annehmen, daß ihr n^{tes} Glied b_{n-1} in der Form darstellbar sei:

$$b_{n-1} = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \cdots \alpha_k B_{k-1}^{(n-1)}. \tag{2}$$

Nun hat aber die Reihe, deren $(n+1)^{\text{tes}}$ Glied den Ausdruck (1) hat, eine erste Differenzenreihe, deren n^{tes} Glied

$$\alpha_1 (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2 (B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \cdots \alpha_k (B_k^{(n)} - B_k^{(n-1)})$$

ist, und dies stimmt nach der Formel § 53 (7) mit dem Ausdruck (2) überein.

Da nun die Glieder einer Reihe durch das Anfangsglied und durch die Reihe der ersten Differenzen eindeutig bestimmt sind, so muß die Reihe der a_n bei passender Bestimmung des Anfangsgliedes a_0 mit der gegebenen Reihe A übereinstimmen, wodurch der Satz bewiesen ist.

Setzt man in der Formel (1) $n = 0, 1, 2, \cdots, k$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0, \\
a_1 &= \alpha_0 + \alpha_1, \\
a_2 &= \alpha_0 + B_1^{(2)} \alpha_1 + \alpha_2, \\
&\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
a_k &= \alpha_0 + B_1^{(k)} \alpha_1 + B_2^{(k)} \alpha_2 + \cdots \alpha_k,
\end{aligned}$$

woraus die α durch die $k+1$ ersten Glieder der Reihe A bestimmt sind.

3. Wir wollen z. B. unter a_n die Summe der n ersten Dreieckszahlen verstehen:

$$a_n = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2};$$

die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung, und nach unserem Satze muß also

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

sein. Um $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu bestimmen, setzen wir $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und erhalten, da

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 10$$

ist, zur Bestimmung der α:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4,$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10,$$

oder

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1,$$

und daraus:

$$a_n = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Dies ist z. B. die Zahl der Kugeln, die in einem regelmäßigen Tetraeder geschichtet sind, und wird darum die n^{te} Tetraederzahl genannt. Die Reihe der Tetraederzahlen beginnt mit

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots .$$

Um die Reihe der n ersten Quadratzahlen

$$c_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

zu ermitteln, hat man in dem Ausdruck

$$c_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$n = 0, 1, 2, 3$ zu setzen und erhält $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, also

$$c_n = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

§ 58. Geometrische Reihen.

1. Eine Reihe von Zahlen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ stehen in geometrischer Progression oder bilden eine geometrische Reihe, wenn jede Zahl aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einem und demselben Faktor q hervorgegangen ist, oder wenn der Quotient zwischen jeder dieser Zahlen und der vorangegangenen a_n/a_{n-1} konstant $= q$ ist. a heißt das Anfangsglied, q der Quotient der geometrischen Reihe. Die Glieder der geometrischen Progression haben also den Ausdruck:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots;$$

das n^{te} Glied ist aq^{n-1}. Wenn q positiv ist, so haben alle Glieder dasselbe Vorzeichen, z. B. das positive, wenn a positiv ist. Ist aber q negativ, so sind die Vorzeichen der Glieder abwechselnd positiv und negativ.

Ist q dem absoluten Werte nach größer als 1, so ist jedes Glied absolut größer als das vorangehende; wir haben eine steigende geometrische Reihe.

Ist q ein echter Bruch, so nehmen die Glieder mit wachsender Rangordnung dem absoluten Werte nach ab; wir haben eine fallende geometrische Reihe.

Ist endlich $q = \pm 1$, so sind alle Glieder gleich $\pm a$.

2. Auch hier ist es eine wichtige Aufgabe, die Summe der n ersten Glieder zu finden. Es ist

$$(1) \quad S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}),$$

und es ist also die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Summe

$$(2) \qquad s = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

zu finden. Man findet diese Summe leicht aus der Bemerkung, daß durch Multiplikation mit q jedes Glied in das folgende übergeht, also

$$(3) \qquad sq = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

wird. Bildet man nun die Differenz aus (2) und (3), so folgt:

$$s(1 - q) = 1 - q^n,$$

und daraus erhält man s in allen Fällen, außer wenn $q = 1$ ist:

$$(4) \qquad s = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Für $q = 1$ aber erhält man direkt $s = n$, wenn man beachtet, daß in diesem Falle alle Glieder den Wert 1 haben.

Ist $q > 1$, so wird man, um positive Zähler und Nenner zu erhalten, lieber

$$s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

schreiben. Aus (1) folgt dann

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

und diese Formel läßt sich in die Regel zusammenfassen:

Um die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe zu erhalten, subtrahiere man das Anfangsglied von dem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe und dividiere durch den um 1 verminderten Quotienten.

3. Wir wollen der Formel (4) eine etwas andere Gestalt geben, indem wir $q = b/a$ setzen und dann den Bruch mit a^n erweitern. Dadurch ergibt sich

$$s = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a - b)},$$

oder wenn wir nach (2)

$$s = 1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

setzen und mit a^{n-1} multiplizieren:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b},$$

oder auch

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

eine Formel, die sich durch Ausmultiplizieren sofort verifizieren läßt.

Beispielsweise erhalten wir für $n = 2$, $n = 3$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Die erste dieser Formeln läßt sich in Worten so ausdrücken:

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus der Differenz und der Summe der beiden Zahlen.

Setzt man $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$, so folgt eine gleichfalls oft angewandte Formel

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

§ 59. Zins- und Rentenrechnung.

1. Eine praktisch wichtige Anwendung der Theorie der geometrischen Reihen ist die auf die Zins- und Rentenrechnung. Wir können hier nur die allgemeinen Grundformeln angeben, indem wir wegen weiterer Details und Beispiele auf Spezialwerke, besonders auf das kleine Werk von Moritz Cantor, „Politische Arithmetik" (Leipzig, Teubner 1898, 2. Auflage 1903), verweisen. Wenn ein Kapital, sagen wir von c Mark, auf Zinsen ausgeliehen wird, so wird dabei verabredet, daß der Schuldner dem Gläubiger am Ende eines jeden Jahres für je hundert Mark des Kapitals eine bestimmte Summe, sagen wir p Mark, zu zahlen hat (p Prozent, in Zeichen $p\,\%$). Diese Zahl p heißt der Zinsfuß. Oft wird auch halbjährliche oder vierteljährliche Zinszahlung vereinbart, wobei jedoch immer die Prozente auf das Jahr bezogen werden. Nach dem heutigen Stand des Geldmarktes ist $3\,\%$, $3\frac{1}{2}\,\%$, $4\,\%$, $4\frac{1}{2}\,\%$ der gewöhnliche Zinsfuß. Er richtet sich in erster Linie nach dem Grad der Sicherheit der Kapitalanlage, d. h. des Vertrauens des Gläubigers, daß der Schuldner seine Verpflichtungen erfüllen werde.

Der Zins von 100 Mark beträgt p, der von einer Mark also $p/100$ Mark, und folglich der Zins von c Mark $cp/100$ Mark. Soll also nach einem Jahr das Kapital c nebst Zinsen zurückgezahlt

werden, so sind $c + cp/100$ zurückzuzahlen, und das Kapital c ist also auf

$$c' = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

gewachsen.

Bisweilen werden nun die Zinsen nicht bar bezahlt, sondern sie werden, wie man sagt, zum Kapital geschlagen und mit ihm weiter verzinst. So entsteht der Zinseszins. Nach dem zweiten Jahr hat sich dann das Kapital c' in derselben Weise vergrößert, und ist also auf

$$c'' = c'\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

gewachsen, und nach Verlauf von n Jahren hat das Kapital die Höhe

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \tag{1}$$

erreicht.

Das Kapital wächst also unter diesen Umständen in geometrischer Progression.

Wenn der Zins nicht jährlich, sondern etwa halbjährlich oder vierteljährlich, oder allgemein nach Verlauf des m^{ten} Teiles eines Jahres zum Kapital geschlagen wird, während sich der Zinsfuß p doch auf das Jahr bezieht, so gibt die Formel (1) für den Wert des Kapitals nach n Jahren

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{nm}, \text{[1]} \tag{2}$$

und wenn die Frage umgekehrt ist, welchen Wert ein nach n Jahren zahlbares Kapital C heute hat, so ergibt sich unter der Annahme (1)

$$c = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}, \tag{3}$$

oder nach der Annahme (2)

$$c = C\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{-nm}. \tag{4}$$

2. Rentenrechnung. Unter einer Rente versteht man eine in regelmäßigen Zeitintervallen, z. B. alle Jahre, sei es für immer, sei es für eine begrenzte Zeit zu zahlende Summe. Angenommen, es sei eine Rente von r Mark während n Jahren am Schluß eines jeden Jahres zahlbar. Wenn nun diese Rente aufgespart und immer

1) Der Handel ist unter sonst gleichen Verhältnissen für den Gläubiger um so vorteilhafter, je größer m ist, d. h. in je kleineren Intervallen die Zinsen zum Kapital geschlagen werden. Gleichwohl wächst der Ausdruck für C, wie wir später sehen werden, mit m nicht über alle Grenzen, sondern er bleibt für eine gegebene Anzahl n von Jahren unter einer bestimmten Grenze, die sich numerisch bestimmen läßt.

verzinslich, mit $p\%$ Zinseszins, angelegt wird, welche Summe ist am Ende der n Jahre aufgelaufen?

Zur Beantwortung dieser Frage bedenke man, daß die erste Zahlung während $n-1$ Jahren, die zweite während $n-2$ Jahren u. s. f., die vorletzte ein Jahr, die letzte noch gar nicht Zins getragen hat. Demnach ist die erste Zahlung

auf $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$,

die zweite auf $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$,

. . . .

die vorletzte auf $r\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

die letzte auf r

angelaufen, und die Gesamtsumme (Endkapital) beträgt also, wenn wir zur Abkürzung

$$1+\frac{p}{100}=q \tag{5}$$

setzen, nach § 58

$$E=r(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\frac{r(q^n-1)}{q-1},$$

oder wenn wir den Ausdruck für q aus (5) einsetzen:

$$E=\frac{100r}{p}\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right]. \tag{6}$$

Um dieselbe Summe am Ende des n^{ten} Jahres zu erhalten, müßte ein Kapital A am Anfang des ersten Jahres auf Zinseszins gelegt werden, was nach n Jahren zu der Summe E angewachsen ist; es müßte also nach (1)

$$E=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

sein. Daraus ergibt sich

$$A=\frac{100r}{p}\left[1-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}\right]. \tag{7}$$

Diese Summe heißt der Barwert der Rente. Sie wäre zu zahlen, wenn die Rente „abgelöst“ werden sollte: Je größer n ist, um so kleiner wird $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}$ und um so näher kommt A der Summe $100\,r/p$, d. h. dem Kapital, das bei einfachem Zins jährlich die Summe r als Zins abwirft.

ZWEITES BUCH.

A L G E B R A.



Elfter Abschnitt.

Algebraische Gleichungen.

---

§ 60. Ganze Funktionen und ihre Wurzeln.

1. In dem gesamten Zahlengebiete, das wir bisher kennen gelernt haben, sind gewisse spezielle Systeme von ausgezeichneten Eigenschaften enthalten, die man algebraische Zahlen nennt, von denen die ersten und einfachsten die Quadratwurzeln sind. Ebenso wie diese aus den quadratischen Gleichungen, so entstehen die allgemeinen algebraischen Zahlen aus der Aufgabe, eine Gleichung höheren Grades aufzulösen. Bevor wir aber zur näheren Betrachtung dieser Aufgaben vorgehen können, ist es notwendig, einige allgemeine Betrachtungen über ganze Funktionen vorauszuschicken.

2. Unter einer ganzen Funktion oder kurz einer Funktion verstehen wir einen Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

worin die $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ bestimmte gegebene Zahlen sind, die wir die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ nennen; n ist eine ganze positive Zahl und x ein Zeichen, für das jeder beliebige Zahlenwert gesetzt werden kann. Wir nennen dann x die Veränderliche (Variable), und $f(x)$ ist ein abgekürztes Zeichen für den ganzen Ausdruck. Ist a_0 von Null verschieden, so heißt n der Grad der Funktion $f(x)$.

Es ist nicht notwendig, daß die Koeffizienten rationale Zahlen sind. Sie können auch irrational und selbst komplex sein.

Statt der Zeichen a, x, f können natürlich auch andere Buchstaben gebraucht werden. Es diene dabei aber als Regel, daß zur Bezeichnung der Koeffizienten vorzugsweise die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c, für die Veränderlichen die Buchstaben x, y, z, t, als Funktionszeichen f, φ, ψ, wohl auch F, Φ, Ψ angewendet werden.

3. Ganze Funktionen können addiert, subtrahiert und multipliziert werden, wobei die Rechenregeln für Polynome angewandt werden. Das Resultat dieser Operationen ist wieder eine ganze Funktion. Man ordnet diese Funktionen, indem man alle Glieder, die die gleiche Potenz von x enthalten, in eins zusammenfaßt, und diese Glieder von links nach rechts entweder nach aufsteigenden oder nach absteigenden Werten des Exponenten in eine Reihe schreibt. So ist z. B.

$$\begin{aligned}&(a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)\\ &= a_0b_0x^5 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^3\\ &+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^2 + (a_1b_3 + a_2b_2)x + a_2b_3.\end{aligned}$$

Wenn man zwei Funktionen n^{ten} und m^{ten} Grades $f(x) = a_0x^n + \cdots$ und $\varphi(x) = b_0x^m + \cdots$ miteinander multipliziert, so fängt das geordnete Produkt $f(x)\varphi(x)$ mit dem Gliede $a_0b_0x^{m+n}$ an, und der Grad eines Produktes ist daher gleich der Summe $m + n$ der Grade der Faktoren.

4. Zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heißen nur dann einander gleich (genauer identisch), $f(x) = \varphi(x)$, wenn sie von gleichem Grade sind, und wenn die Koeffizienten gleicher Potenzen in beiden die nämlichen Werte haben, beide haben dann für jeden beliebigen Zahlenwert von x denselben numerischen Wert.

Davon hat man die Gleichheit zweier Funktionen $f(x) = \varphi(x)$ zu unterscheiden, die nur für einzelne besondere Werte von x stattfindet.

Während also die Gleichheit $f(x) = 0$ im ersten Sinne verlangt, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ alle den Wert Null haben, kann man andererseits nach solchen Werten $x = x_1$ fragen, für die $f(x)$ bei nicht verschwindenden Koeffizienten verschwindet. Ein solcher Wert x_1 heißt eine Wurzel von $f(x)$ oder auch eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Wenn die Frage so gestellt wird, heißt x auch die Unbekannte der Gleichung, für die der bestimmte Wert x_1 gesucht wird.

5. Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ reell sind, so heißt $f(x)$ eine reelle Funktion. Hat eine reelle Funktion eine imaginäre Wurzel $x_1 = \alpha + \beta i$, so ist

$$(2)\quad a_0(\alpha + \beta i)^n + a_1(\alpha + \beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha + \beta i) + a_n = 0.$$

Daraus folgt, da man nach § 44, 5. überall i durch $-i$ ersetzen kann, daß auch

$$(3)\quad a_0(\alpha - \beta i)^n + a_1(\alpha - \beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha - \beta i) + a_n = 0$$

sein muß. Es ist also auch $x_1' = \alpha - \beta i$ eine Wurzel von $f(x)$. Dieses wichtige Ergebnis sprechen wir als Satz aus:

Bei einer reellen Funktion $f(x)$ können imaginäre Wurzeln nur paarweise vorkommen, und zwar so, daß je zwei Wurzeln konjugiert imaginär sind.

§ 61. Division ganzer Funktionen.

1. Das Rechnen mit ganzen Funktionen hat mannigfache Analogie mit dem Rechnen im Gebiete der ganzen Zahlen. Von besonderer Wichtigkeit sind die Regeln für die Division.

Es seien

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \\ \varphi(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned}$$

zwei Funktionen von den Graden n und m, also a_0 und b_0 von Null verschieden; wir nehmen $n \geqq m$ an.

Die Funktion $f(x)$ heißt **teilbar** durch $\varphi(x)$, wenn es eine ganze Funktion $Q(x)$ von der Art gibt, daß $f(x) = \varphi(x)\,Q(x)$ ist.

Nach § 60, 3. muß $Q(x)$ vom Grade $n - m$ sein, und um den Fall $n = m$ gleich mit zu erledigen, müssen wir unter einer ganzen Funktion vom Grade Null eine von Null verschiedene Zahl (ohne die Veränderliche x) verstehen.

Um die Teilbarkeit näher zu untersuchen, setzen wir

$$(2)\qquad Q(x) = q_0x^{n-m} + q_1x^{n-m-1} + \cdots + q_{n-m-1}x + q_{n-m},$$

und setzen die Koeffizienten des Produktes $\varphi(x)\,Q(x)$, von a_0 aufsteigend, den Koeffizienten der Funktion $f(x)$ gleich. Dies gibt uns folgende Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_0 &= b_0q_0, \\ a_1 &= b_0q_1 + b_1q_0, \\ a_2 &= b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_\nu &= b_0q_\nu + b_1q_{\nu-1} + b_2q_{\nu-2} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-m} &= b_0q_{n-m} + b_1q_{n-m-1} + \cdots. \end{aligned}$$

Die Bildung dieser Gleichungen ist sehr leicht, weil man immer nur darauf zu sehen hat, daß in dem Ausdruck für a_ν die Summe der Indices von b_iq_k, also $i + k$, gleich ν werde. Die Summe ist nur so weit fortzusetzen, daß der Index i von b nicht größer als m wird.

Hier haben wir nun ein System von $n-m+1$ Gleichungen ersten Grades, aus dem die $n-m+1$ Unbekannten $q_0, q_1, \ldots q_{n-m}$ bestimmt werden können. Es ist aber ein Gleichungssystem von besonders einfachem Bau; man findet nämlich aus der ersten dieser Gleichungen $q_0 = a_0/b_0$. Ist q_0 gefunden, so ergibt die zweite Gleichung $q_1 = (a_1 - b_1 q_0)/b_0 = (a_1 b_0 - b_1 a_0)/b_0^2$ u. s. f. und man erhält in den Nennern immer nur Potenzen von b_0, was nach Voraussetzung von Null verschieden ist.

Ist diese Bestimmung ausgeführt, so stimmt das Produkt $\varphi(x)\,Q(x)$ in den Koeffizienten von $x^n, x^{n-1}, \ldots x^m$ mit $f(x)$ überein, und die Differenz $f(x) - \varphi(x)\,Q(x)$ ist eine ganze Funktion

$$(4) \qquad R(x) = r_0 x^{m-1} + r_1 x^{m-2} + \cdots + r_{m-2} x + r_{m-1},$$

deren Grad höchstens $= m-1$ ist. Er kann aber auch niedriger sein, wenn r_0 oder r_0 und r_1 u. s. f. verschwinden. Wir haben dann also

$$(5) \qquad f(x) = \varphi(x)\,Q(x) + R(x).$$

Diese Operation heißt die Division von $f(x)$ durch $\varphi(x)$; $f(x)$ heißt der Dividendus, $\varphi(x)$ der Divisor, $Q(x)$ der Quotient, $R(x)$ der Rest. Ist $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, so sind $Q(x)$ und $R(x)$ eindeutig dadurch bestimmt, daß der Grad von $R(x)$ kleiner sein soll als der Grad von $\varphi(x)$.

Dies ist genau wie bei der Division ganzer Zahlen (§ 14), nur daß beim Rest nicht der kleinere Zahlenwert, sondern der niedrigere Grad in Betracht kommt. Man kann auch die Rechnung ganz so anordnen, wie bei der Division dekadischer Zahlen, wie folgendes Beispiel zeigt, bei dem

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8,$$
$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 5$$

angenommen ist:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +\,3x^3 & -\,5x^2 & +\,2x & -\,8 & \; x^2 + 2x - 5 = 3x^2 - 3x + 16 \\
3x^4 & +\,6x^3 & -\,15x^2 & & & \\
\hline
 & -\,3x^3 & +\,10x^2 & +\,2x & & \\
 & -\,3x^3 & -\,6x^2 & +\,15x & & \\
\hline
 & & 16x^2 & -\,13x & -\,8 & \\
 & & 16x^2 & +\,32x & -\,80 & \\
\hline
 & & & -\,45x & +\,72. &
\end{array}$$

Es ist also $Q(x) = 3x^2 - 3x + 16$, $R(x) = -45x + 72$.

2. $f(x)$ ist dann und nur dann durch $\varphi(x)$ teilbar, wenn der Rest $R(x)$ identisch Null ist, also wenn

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0, \cdots \quad r_{m-1} = 0.$$

Um auch hierfür ein Beispiel zu geben, nehmen wir

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1,$$
$$\varphi(x) = x^2 - x - 1,$$

und erhalten:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 & x^2 - x - 1 = x^2 + 2x - 1 \\
x^4 - x^3 - x^2 & \\
\hline
 2x^3 - 3x^2 - x & \\
 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\
\hline
 - x^2 + x + 1 & \\
 - x^2 + x + 1 & \\
\hline
 - \quad - \quad -. &
\end{array}$$

3. Besonders einfach gestaltet sich die Division, wenn der Divisor vom ersten Grade, oder wie man auch sagt, eine **lineare Funktion** ist. Wir wollen sie in der Form $\varphi(x) = x - \alpha$ annehmen; dann hat man in (3) $b_0 = 1$, $b_1 = \alpha$ zu setzen, und erhält zur Bestimmung der q:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_0, \\
a_1 &= q_1 - \alpha q_0, \\
a_2 &= q_2 - \alpha q_1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1} &= q_{n-1} - \alpha q_{n-2},
\end{aligned}$$

und daraus findet man

$$(6) \qquad \begin{aligned}
q_0 &= a_0, \\
q_1 &= a_0\alpha + a_1, \\
q_2 &= a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_{n-1} &= a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + a_2\alpha^{n-3} + \cdots + a_{n-1},
\end{aligned}$$

und der Rest wird hier vom Grade Null, d. h. von x unabhängig. Wir können ihn leicht bestimmen, wenn wir in $f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + R$ für x den Zahlenwert α setzen; dann wird $(x - \alpha)\,Q(x) = 0$, und es folgt $R = f(\alpha)$, also

$$f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + f(\alpha).$$

Ist $f(\alpha) = 0$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ teilbar, und wir haben den Satz:

Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann durch $x - \alpha$ teilbar, wenn α eine Wurzel von $f(x)$ ist.

4. Die Bedingung dafür, daß $f(x)$ durch $(x - \alpha)^2$ teilbar ist, ist die, daß außer $f(x)$ auch $Q(x)$ durch $(x - \alpha)$ teilbar, daß also $Q(\alpha) = 0$ sei. Es ist aber nach (6):

$$Q(\alpha) = q_0\alpha^{n-1} + q_1\alpha^{n-2} + \cdots + q_{n-1}$$
$$= n a_0\alpha^{n-1} + (n-1) a_1\alpha^{n-2} + (n-2) a_2\alpha^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\alpha + a_{n-1}.$$

Man nennt die Funktion

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

die derivierte oder abgeleitete Funktion von $f(x)$. Es ist dann also

$$Q(\alpha) = f'(\alpha),$$

und es ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ durch $(x - \alpha)^2$ teilbar ist, $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$, oder in Worten:

Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann durch $(x - \alpha)^2$ teilbar, wenn α eine gemeinsame Wurzel von $f(x)$ und seiner Derivierten $f'(x)$ ist.

5. Ist x_1 eine Wurzel von $f(x)$, so können wir $f(x) = (x - x_1) f_1(x)$ setzen, wo $f_1(x)$ eine Funktion vom Grade $n - 1$ ist, und aus 3. geht hervor, daß die höchste Potenz x^{n-1} von x in $f_1(x)$ denselben Koeffizienten a_0 hat, wie x^n in $f(x)$. Hat $f_1(x)$ eine Wurzel x_2, so können wir ebenso $f_1(x) = (x - x_2) f_2(x)$ setzen u. s. f. Es ist also, wenn alle die so gebildeten Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ Wurzeln haben, und die letzte $f_{n-1}(x) = a_0(x - x_n)$ ist,

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n). \tag{7}$$

Daraus folgt, daß eine Funktion n^{ten} Grades niemals mehr als n Wurzeln haben kann.

Denn wenn $f(x)$ die n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat, so muß x_2 eine Wurzel von $f_1(x)$, x_3 eine Wurzel von $f_2(x)$ sein, u. s. f., und die Zerlegung (7) ist möglich. Ist dann α irgend eine Wurzel von $f(x)$, so muß $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \cdots (\alpha - x_n) = 0$, also α einer der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich sein.

Wenn sich daher in einem besonderen Falle bei einer Funktion n^{ten} Grades,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

mehr als n Werte von x nachweisen lassen, für die $f(x)$ verschwindet, so bleibt nichts übrig, als daß die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ alle verschwinden, also $f(x)$ identisch (für jedes beliebige x) verschwindet. Wir können dem eben ausgesprochenen Satz auch die folgende Form geben, in der er in vielen Fällen ein wichtiges Beweismittel bietet:

Wenn eine Funktion n^{ten} Grades von x für mehr als n Werte von x verschwindet, so muß sie identisch verschwinden.

6. Unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Zerlegung (7) kann aber ein und dieselbe Zahl mehrmals vorkommen. Immerhin ist dann $f(x)$ in n Faktoren ersten Grades zerlegt, aber die Anzahl der Wurzeln ist kleiner als n. Um die Übereinstimmung in der Ausdrucksweise herzustellen, spricht man in diesen Fällen trotzdem von n Wurzeln, die man aber nur dadurch erhält, daß man eine oder einige der Wurzeln mehrmals, nämlich so oft zählt, als der betreffende Faktor $(x - x_i)$ in (7) vorkommt. Man hat es dann mit sogenannten mehrfachen Wurzeln zu tun, und nach 4. ist x_i eine mehrfache Wurzel, wenn es eine gemeinschaftliche Wurzel von $f(x)$ und $f'(x)$ ist.

§ 62. Größter gemeinschaftlicher Teiler.

1. Zwei ganze Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$, wofür wir bisweilen auch kürzer f und f_1 schreiben, die eine gemeinschaftliche Wurzel haben, haben auch einen gemeinschaftlichen Teiler. Denn ist x_1 eine gemeinschaftliche Wurzel, so sind beide Funktionen durch die lineare Funktion $x - x_1$ teilbar. Es können aber auch $f(x)$ und $f_1(x)$ gemeinschaftliche Teiler höheren Grades haben. Haben $f(x)$ und $f_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Teiler, also auch keine gemeinschaftliche Wurzel, so heißen sie teilerfremd oder relativ prim.

Da die Divisionsregeln der ganzen Funktionen dieselben sind wie die der ganzen Zahlen, so kann man wie dort den Euklidischen Algorithmus zur Ermittelung der gemeinschaftlichen Teiler zweier Funktionen anwenden (§ 15).

Es seien f und f_1 zwei gegebene Funktionen der Grade n und n_1, und es sei $n \gtreqless n_1$. Man kann dann durch Division nach § 61 eine Reihe von Funktionen $f_2, f_3, \ldots$ von abnehmenden Graden $n_2, n_3, \ldots$ und die Quotienten $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ bilden, so daß

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= Qf_1 + f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 + f_3, \\ f_2 &= Q_2 f_3 + f_4, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Reihe von Gleichungen läßt sich so lange fortsetzen, als die Division nicht aufgeht. Da aber die Grade der $f_2, f_3, \ldots$ immer abnehmen, so muß die Division schließlich aufgehen. Es seien die beiden letzten dieser Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1} + f_\nu, \\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1} f_\nu, \end{aligned}$$

und hieraus läßt sich, genau wie bei den Zahlen, schließen, daß f_ν ein Teiler aller vorangehenden Funktionen $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, \ldots f_1, f$ ist, und daß jeder Teiler von f und f_1 zugleich Teiler von $f_2, f_3, \ldots f_\nu$ sein muß. Es heißt darum f_ν der größte gemeinschaftliche Teiler von f und f_1 (wobei das größer oder kleiner sich auf den Grad bezieht).

Es kann f_ν auch vom nullten Grade, d. h. von x unabhängig, eine von Null verschiedene Zahl sein, und durch eine Zahl ist jede Funktion teilbar; in diesem Falle sind f und f_1 teilerfremd.

2. Der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Funktionen kann also durch alleinige Anwendung der vier Spezies (rationale Rechnung) aus den Koeffizienten der gegebenen Funktionen abgeleitet werden.

Man kann nun auch durch rationale Rechnung entscheiden, ob eine ganze Funktion mehrfache Wurzeln hat, indem man die Funktion $f(x)$ und ihre Abgeleitete $f'(x)$ auf ihre gemeinsamen Teiler untersucht.

Wir nehmen folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + 2x + 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 2. \end{aligned}$$

Hier kann man für $f'(x) = 2(3x^5 - 5x^4 + 1)$ auch die Funktion $f_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$ zum ersten Divisor wählen, die sich von $f'(x)$ nur durch einen Zahlenfaktor unterscheidet.

Die erste Division ergibt

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) f_1(x) - \frac{5}{9}(x^4 - 3x - 2),$$

als zweiten Divisor f_2 kann man $x^4 - 3x - 2$ wählen und erhält

$$f_1(x) = (3x - 5) f_2(x) + 9(x^2 - x - 1),$$

und nun ergibt die dritte Division mit $f_3 = x^2 - x - 1$, die aufgeht:

$$f_2 = (x^2 + x + 2) f_3.$$

Es ist also $x^2 - x - 1$ der größte gemeinschaftliche Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, und durch wirkliche Ausführung der Multiplikation bestätigt man leicht

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1)^2.$$

3. Aus dem Euklidischen Algorithmus läßt sich die Lösung der folgenden Aufgabe ableiten:

Sind $f(x)$ und $f_1(x)$ zwei gegebene teilerfremde Funktionen, so sollen zwei andere ganze Funktionen $F(x)$, $F_1(x)$ so bestimmt werden, daß

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = 1 \tag{3}$$

wird.

Wir bemerken zunächst, daß sich die Aufgabe nicht wesentlich ändert, wenn auf der rechten Seite von (3) statt 1 ein anderer von Null verschiedener Zahlenwert c steht; denn man hat dann nur, um die Gleichung (3) zu erhalten, die Koeffizienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ durch c zu dividieren.

Um aber F und F_1 zu finden, hat man die Formeln (1) und (2) anzuwenden, in denen, wenn f und f_1 relativ prim sind, f_ν eine von Null verschiedene Zahl wird. Wenn man also aus der ersten der Gleichungen (1) f_2 entnimmt und in die zweite und dritte einsetzt, dann aus der zweiten f_3 entnimmt und in die folgenden einsetzt, und so fortfährt, so erhält man zuletzt aus der ersten Gleichung (2) eine Gleichung von der Form (3), und die Aufgabe ist gelöst.

Um ein einfaches Beispiel zu betrachten, nehmen wir

$$f = x^2 - x - 1, \qquad f_1 = x^2 + 1$$

und erhalten

$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 1) - (x + 2),$$
$$x^2 + 1 = (x + 2)(x - 2) + 5\,.$$

Und daraus, indem man die erste Gleichung mit $x - 2$ multipliziert und zur zweiten addiert:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) + (x^2 + 1)(3 - x) = 5\,.$$

Folglich ist $F(x) = x - 2$, $F_1(x) = 3 - x$.

Unter der gleichen Voraussetzung über f und f_1, nämlich daß sie teilerfremd seien, kann man auch die Gleichung befriedigen

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = \Phi(x), \tag{4}$$

wenn $\Phi(x)$ eine beliebig gegebene ganze Funktion ist. Man hat nur die Gleichung (3) mit $\Phi(x)$ zu multiplizieren und dann für $F(x)\,\Phi(x)$ und $F_1(x)\,\Phi(x)$ wieder $F(x)$ und $F_1(x)$ zu schreiben.

§ 63. Reduzible und irreduzible Funktionen.

1. Wir nehmen jetzt an, daß in der ganzen Funktion n^{ten} Grades

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

die Koeffizienten ganze Zahlen seien.

Ist a_0 von Null verschieden, so können wir die Auffindung der Wurzeln von (1) auf den Fall zurückführen, daß $a_0 = 1$ ist. Wenn wir nämlich (1) mit a_0^{n-1} multiplizieren, so ergibt sich

$$a_0^{n-1} f(x) = (a_0 x)^n + a_1 (a_0 x)^{n-1} + a_2 a_0 (a_0 x)^{n-2} + \cdots + a_n a_0^{n-1},$$

und wenn wir also

$$a_0 x = y, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 a_0 = b_2, \quad \ldots a_n a_0^{n-1} = b_n,$$
$$a_0^{n-1} f(x) = \varphi(y)$$

setzen, so ist

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n, \tag{2}$$

und die $b_1, b_2, \cdots b_n$ sind ganze Zahlen.

Die Wurzeln von $f(x)$ erhält man dann, wenn man die Wurzeln von $\varphi(y)$ durch a_0 dividiert.

Man wird nun zunächst nach den etwa vorhandenen rationalen Wurzeln von $f(x)$ oder $\varphi(y)$ fragen. Ist p/q eine Wurzel von $\varphi(y)$, worin p, q ganze Zahlen sind, die wir ohne gemeinschaftliche Teiler annehmen können, und von denen die zweite, q, positiv angenommen sei, so muß

$$p^n + b_1 p^{n-1} q + b_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + b_n q^n = 0$$

sein. Hieraus folgt aber, daß p^n durch q teilbar sein müßte, was, da p und q relativ prim sein sollen, nur möglich ist, wenn $q = 1$ ist.

Eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ muß also eine ganze Zahl sein.

Ist aber p eine solche Wurzel, so ist

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

und daraus folgt, daß b_n durch p teilbar sein muß. Um also festzustellen, ob eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ vorhanden ist oder nicht, hat man die sämtlichen Divisoren von b_n zu ermitteln, und jeden von ihnen, mit positivem und negativem Zeichen, versuchsweise in $\varphi(y)$ für y einzusetzen. Wenn p einer dieser Divisoren ist, für den $\varphi(p) = 0$ wird, so ist p eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ und p/a_0 eine rationale Wurzel von $f(x)$.

Es ist dann $\varphi(y)$ durch $y - p$ teilbar, und das Resultat der Division $\varphi(y) = (y - p)\varphi_1(y)$ ist eine Funktion $\varphi_1(y)$ von derselben Form wie $\varphi(y)$, deren Koeffizienten gleichfalls ganze Zahlen sind.

So hat beispielsweise

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1$$

den Faktor $y - 1$ und es ergibt sich durch Division

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1 = (y - 1)(y^3 - 3y^2 - 3y - 1).$$

2. Eine Funktion $f(x)$ mit ganzzahligen oder auch nur rationalen Koeffizienten heißt reduzibel oder zerlegbar, wenn sie sich in zwei Faktoren $f_1(x)$, $f_2(x)$ zerlegen läßt, deren jeder die Veränderliche x wirklich enthält, und die ebenfalls rationale Koeffizienten haben. Ist eine solche Zerlegung nicht möglich, so heißt $f(x)$ irreduzibel oder unzerlegbar.

Wir besitzen kein allgemeines Mittel, um eine reduzible von einer irreduziblen Funktion zu unterscheiden, ebensowenig wie wir eine Primzahl von einer zusammengesetzten Zahl durch ein allgemeines Kennzeichen unterscheiden können. Es bleiben nur Versuche übrig, die durch verschiedene zahlentheoretische Hilfsmittel eingeschränkt werden können. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x - 8 \\ &= (x^3 - 2x^2 + 2)(x^3 - 4x - 4) \end{aligned}$$

eine reduzible Funktion.

3. Über die Reduzibilität einer ganzen Funktion $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten besteht ein allgemeiner Satz, von dem der Satz in Nr. 1. über rationale Wurzeln ein spezieller Fall ist. Der Satz, den Gauß bewiesen hat, lautet so:

Ist die Funktion

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ zerlegbar in die beiden Faktoren

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_\mu, \\ \psi(x) &= x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu, \end{aligned}$$

in denen die Koeffizienten b_i, c_i rationale Zahlen sind, so müssen die b_i, c_i gleichfalls ganze Zahlen sein.

Die vorausgesetzte Zerlegung und Ausführung der Multiplikation $\varphi\psi = f$ ergibt zunächst die Bedingung:

$$\mu + \nu = n,$$

und sodann:

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1, \\ a_2 &= b_2 + c_1 b_1 + c_2, \\ a_3 &= b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

nach einem leicht ersichtlichen Gesetz. (In jeder dieser Gleichungen ist in jedem Gliede der rechten Seite die Summe der Indices von b und c gleich dem Index von a auf der linken Seite.)

Hieraus können wir den ausgesprochenen Satz indirekt auf folgende Art beweisen.

Angenommen, es seien die $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ nicht alle ganze Zahlen, so können wir sie in die Form setzen:

$$\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \frac{B_3}{B_0}, \ldots \frac{B_\mu}{B_0}$$

und zwar so, daß $B_0, B_1, B_2, \ldots B_\mu$ ganze Zahlen sind, die nicht alle einen gemeinsamen Teiler haben, und B_0 größer als 1 ist. Ebenso setzen wir für $c_1, c_2, \ldots c_\nu$:

$$\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0}, \ldots \frac{C_\nu}{C_0},$$

sodaß auch die ganzen Zahlen $C_0, C_1, C_2, \ldots C_\nu$ keinen gemeinsamen Teiler haben, schließen aber den Wert $C_0 = 1$ nicht aus.

Wir wählen einen Primfaktor p von B_0, der nach der Voraussetzung weder in allen B noch in allen C aufgeht. Es sei B_h das erste der B und C_k das erste der C, das durch p nicht teilbar ist. Es ist dann

$$\begin{array}{lll} & B_0, B_1, \ldots B_{h-1} \text{ teilbar}, & B_h \text{ unteilbar durch } p, \\ (4) & & \\ & C_0, C_1, \ldots C_{k-1} \quad \text{"} & C_k \quad \text{"} \quad \text{"} \quad . \end{array}$$

Hierin ist h nicht gleich 0, k kann aber auch $= 0$ sein, wenn schon C_0 durch p nicht teilbar ist.

Nun nehmen wir aus den Gleichungen (3) die $(h+k)^{\text{te}}$ heraus und schreiben sie, indem wir sie mit $B_0 C_0$ multiplizieren, in der folgenden Ordnung:

$$\begin{aligned} B_0 C_0 a_{h+k} = B_h C_k + B_{h-1} C_{k+1} + B_{h-2} C_{k+2} + \cdots \\ + B_{h+1} C_{k-1} + B_{h+2} C_{k-2} + \cdots. \end{aligned}$$

Im Falle $k = 0$ fällt hier natürlich die zweite Reihe weg. Da nun nach der Voraussetzung a_{h+k} eine ganze Zahl und B_0 durch p teilbar ist, so ist die linke Seite dieser Gleichung durch p teilbar. Die rechte Seite ist aber nicht durch p teilbar, weil $B_h C_k$ nicht durch p teilbar ist, während alle anderen Glieder

$$\begin{array}{l} B_{h-1} C_{k+1}, \quad B_{h-2} C_{k+2}, \ldots \\ B_{h+1} C_{k-1}, \ldots \end{array}$$

durch p teilbar sind.

Hier zeigt sich also ein Widerspruch, und der Satz ist damit bewiesen.

4. Hieraus folgt ein allgemeiner Satz über die Irreduzibilität von ganzen Funktionen, der von Eisenstein herrührt und so lautet:

Sind die ganzzahligen Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$

einer Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ alle durch eine Primzahl p teilbar, der letzte a_n aber nicht durch p^2, so ist $f(x)$ irreduzibel, wobei die Zahl 0 als durch jede Primzahl teilbar gilt.

Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

zerlegbar in die beiden Funktionen

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \cdots + b_{\mu-1} x + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu.$$

Es sind dann die $b_1, b_2, \ldots b_\mu, c_1, c_2, \ldots c_\nu$, wenn sie rational sein sollen, nach Nr. 3. ebenfalls ganze Zahlen, und die Ausführung der Multiplikation gibt das Formelsystem, das wir nun in umgekehrter Reihenfolge wie vorhin anordnen:

$$\begin{aligned} a_n &= b_\mu c_\nu, \\ a_{n-1} &= b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu, \\ a_{n-2} &= b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_\nu &= b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + c_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

Zunächst gelten diese Formeln nur unter der Voraussetzung, daß $\nu > \mu$ ist; um sie aber auch für $\nu \overline{\gtrless} \mu$ anwenden zu können, müssen wir $c_0 = 1$ und jedes c mit negativem Index $= 0$ setzen.

Ist nun a_n durch p, aber nicht durch p^2 teilbar, so folgt aus $a_n = b_\mu c_\nu$, daß von den beiden Faktoren der eine, etwa b_μ, durch p teilbar sein muß, der andere c_ν aber unteilbar. Da aber $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_\nu$ alle auch durch p teilbar sind, so folgt aus (5), daß auch $b_{\mu-1}, b_{\mu-2}, \ldots b_1$ durch p teilbar sein müssen; dann aber ergibt die letzte dieser Gleichungen, durch die a_ν bestimmt ist, den Widerspruch, daß auch c_ν durch p teilbar sein müßte. Der Satz ist also bewiesen.

Hieraus folgt z. B. die Irreduzibilität der Funktion 5ten Grades

$$f(x) = x^5 - 4x - 2. \tag{6}$$

5. Man kann durch Einführung einer neuen Veränderlichen jede Funktion $f(x)$ auf eine vereinfachte Form bringen, in der die zweithöchste Potenz der Veränderlichen nicht vorkommt.

Es ist nämlich nach dem binomischen Lehrsatz

$$a_0 \left(x + \frac{a_1}{n a_0}\right)^n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \frac{n-1}{2n} \frac{a_1^{\,2}}{a_0} x^{n-2} + \cdots,$$

und wenn man also

$$y = x + \frac{a_1}{n a_0} \tag{7}$$

setzt, so werden die Potenzen x^{n-2}, x^{n-3}, ... Funktionen $(n-2)^{\text{ten}}$, $(n-3)^{\text{ten}}$ ... Grades von y, und es wird

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_0$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von y:

$$\varphi(y) = a_0 y^n + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_0,$$

worin die b aus den a durch rationale Rechnung abgeleitet sind. Es ist z. B. für $n = 3$, $a_0 = 1$:

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

$$y = x + \frac{a_1}{3},$$

$$\varphi(y) = y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3} a_1\right) y + \frac{2 a_1{}^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3.$$

6. Der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ mit rationalen Koeffizienten hat, wie aus dem Algorithmus (§ 62) hervorgeht, ebenfalls rationale Koeffizienten. Wenn also $f(x)$ irreduzibel ist, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar, oder $F(x)$ ist relativ prim zu $f(x)$. Im letzteren Falle haben $f(x)$ und $F(x)$ keine gemeinschaftliche Wurzel. Daraus folgt der für die Gleichungstheorie außerordentlich wichtige

> Hauptsatz: Hat die irreduzible Funktion $f(x)$ mit $F(x)$ eine Wurzel gemein, so ist $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar, und alle Wurzeln von $f(x)$ sind zugleich Wurzeln von $F(x)$.

7. Die Begriffe der Reduzibilität und Irreduzibilität werden noch in einem weiteren Sinne gebraucht.

Eine irreduzible Funktion kann nämlich in Faktoren zerfallen, die in ihren Koeffizienten außer rationalen Zahlen noch eine bestimmte irrationale Zahl, z. B. $\sqrt{-1}$ oder $\sqrt{2}$ oder irgend eine andere Quadratwurzel enthalten; andere Funktionen werden auch dann noch unzerfällbar bleiben, wenn auch diese Irrationalität gestattet ist. Es entsteht auf diese Weise durch Hinzufügung dieser Irrationalität ein Zahlenreich (Zahlkörper), in dem jede rationale Rechnung, abgesehen von der Division durch Null, ausgeführt werden kann und das dann für die gerade vorliegende spezielle Aufgabe als rational gilt und darum der Rationalitätsbereich genannt wird. Das Hinzufügen einer solchen Irrationalität zu den rationalen Zahlen wird Adjunktion genannt.

So ist z. B. $x^2 + 1$ irreduzibel im Gebiete der rationalen Zahlen,

dagegen reduzibel nach Adjunktion von $i = \sqrt{-1}$; denn es ist $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

Die Funktion $x^4 - 8x^3 - 8x - 8$ ist reduzibel nach Adjunktion von $\sqrt{3}$, nämlich

$$x^4 - 8x^3 - 8x - 8$$
$$= [x^2 - 4x - 2 + 2\sqrt{3}(x + 1)][x^2 - 4x - 2 - 2\sqrt{3}(x + 1)].$$

Oft werden auch mehrere Irrationalitäten nacheinander adjungiert. So bleibt $x^4 - 2x^2 + 2$ auch nach Adjunktion von $\sqrt{2}$ noch irreduzibel, wird aber reduzibel durch darauf folgende Adjunktion von $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$:

$$x^4 - 2x^2 + 2 = \left(x^2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\, x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\, x + \sqrt{2}\right).$$

Auch bei dieser erweiterten Bedeutung der Irreduzibilität bleibt der Hauptsatz 6. bestehen:

Sind die Koeffizienten von $F(x)$ und $f(x)$ in dem erweiterten Rationalitätsbereich enthalten und ist $f(x)$ in diesem erweiterten Bereich irreduzibel, so ist, wenn $f(x)$ mit $F(x)$ eine Wurzel gemeinschaftlich hat, $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar.

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

§ 64. Symmetrische Funktionen.

1. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganz beliebige (unbestimmte, veränderliche) Größen, so können wir, wie wir in § 61 gesehen haben, eine Funktion n^{ten} Grades von x bilden, deren Wurzeln diese n Größen sind, nämlich

$$(1) \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Wir nehmen den Koeffizienten von x^n hier $= 1$ an. Ordnen wir nach Potenzen von x, so ergibt sich

$$(2) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

worin

$$(3) \qquad \begin{aligned} -a_1 &= \Sigma x_1, \\ a_2 &= \Sigma x_1 x_2, \\ -a_3 &= \Sigma x_1 x_2 x_3, \\ &\cdots\cdots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 x_3 \cdots x_n, \end{aligned}$$

d. h. es ist $-a_1$ die Summe der x_i, a_2 die Summe der Produkte zu je zweien, $-a_3$ die Summe der Produkte zu je dreien u. s. f., endlich $\pm a_n$ das Produkt aller x_i (vgl. § 55).

Man kann also die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ rational durch die Wurzeln von $f(x)$ ausdrücken.

Die Summen, die auf der rechten Seite von (3) stehen, d. h. die Summe aller x_i, die Summen aller Produkte zu zwei, zu drei u. s. w., sind symmetrische Funktionen, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn die $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebig untereinander permutiert werden. Wir nennen diese $-a_1, a_2, -a_3, \cdots \pm a_n$ speziell die symmetrischen Grundfunktionen.

2. Wir definieren eine symmetrische Funktion jetzt allgemein so: Eine symmetrische Funktion $S(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist ein Ausdruck, der durch Addition, Subtraktion und Multiplikation aus den n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und beliebigen Zahlen zusammengesetzt ist, und der sich nicht ändert, wenn die $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebig untereinander permutiert werden.

3. Es gilt nun der für die ganze Algebra wichtige Satz:

Jede symmetrische Funktion $S(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kann rational und ganz durch die symmetrischen Grundfunktionen ausgedrückt werden.

D. h. man kann durch Addition, Subtraktion und Multiplikation einen Ausdruck $F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ zusammensetzen, sodaß

$$S(x_1, x_2, \ldots x_n) = F(a_1, a_2, \ldots a_n) \tag{4}$$

eine Identität wird, wenn für $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Ausdrücke aus (3) eingesetzt werden.

Wir wollen hier den sehr einfachen und eleganten Beweis dieses Satzes von Cauchy wiedergeben.

Der Satz ist selbstverständlich für $n = 1$; denn in diesem Falle haben wir nur eine symmetrische Grundfunktion $-a_1 = x_1$. Wir haben also nur nötig, den Satz unter der Voraussetzung, daß er für Funktionen von $n-1$ Veränderlichen schon bewiesen sei, für n Veränderliche zu beweisen, weil er dann mittels der vollständigen Induktion allgemein folgt.

4. Um die symmetrischen Grundfunktionen der $n-1$ Größen $x_2, \ldots x_n$ zu erhalten, kann man den Quotienten

$$\varphi(x) = f(x)/(x - x_1)$$

bilden und erhält

$$(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1},$$

worin (§ 61, (6))

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die symmetrischen Grundfunktionen der $x_2, \ldots x_n$ sind also ganze Funktionen von x_1 und von $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, und wenn wir unsern Satz für $n-1$ Größen als bewiesen annehmen, so sind alle symmetrischen Funktionen von $x_2, x_3, \ldots x_n$ rational durch $x_1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ ausdrückbar.

Denken wir uns die gegebene symmetrische Funktion

$$S = S(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

nach Potenzen von x_1 geordnet, so sind die Koeffizienten der einzelnen Potenzen symmetrische Funktionen der $x_2, x_3, \ldots x_n$, und also in der angegebenen Weise ausdrückbar, und es folgt:

Setzen wir den Satz 3. für symmetrische Funktionen von $n-1$ Größen als erwiesen voraus, so kann S als ganze Funktion von $x_1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ dargestellt werden.

Den so gebildeten Ausdruck von S bezeichnen wir mit $F(x_1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$. Wenn wir aber die ganze Funktion $F(x, a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ durch $f(x)$ dividieren, so erhalten wir nach § 61, (5) einen Quotienten Q und einen Rest R, der in Bezug auf x höchstens vom Grade $n-1$ ist:

$$F(x) = Qf(x) + R(x),$$

worin Q und R außer $x, a_1, \ldots a_{n-1}$ auch noch a_n enthalten. Setzen wir in dieser Formel $x = x_1$, so wird $f(x_1) = 0$, $F = S$ und folglich

$$S = R(x_1) = R(x_1, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

worin R eine ganze Funktion der $x_1, a_1, a_2, \ldots a_n$ ist, aber in Bezug auf x_1 höchstens den Grad $n-1$ erreicht.

Nun ist aber nach Voraussetzung S eine symmetrische Funktion der $x_1, x_2, \ldots x_n$. Sie ändert sich daher nicht, wenn wir beispielsweise x_1 mit x_2 vertauschen, und da hierdurch auch die $a_1, a_2, \ldots a_n$ ungeändert bleiben, so ist S auch gleich $R(x_2)$. Wir haben also

$$S = R(x_1) = R(x_2) = \cdots = R(x_n),$$

und die ganze Funktion $R(x) - S$, die höchstens von $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, verschwindet für die n Werte $x = x_1, x_2, \ldots x_n$. Sie muß daher nach dem Satze § 61, 5. identisch verschwinden. Setzen wir

$$R(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1},$$

so müssen $A_0, A_1, A_2, \ldots, (A_{n-1} - S)$ alle gleich Null sein, also

$$S = A_{n-1},$$

d. h. gleich einer ganzen Funktion der $a_1, a_2, \ldots a_n$, wie bewiesen werden sollte.

5. Der Beweis des Satzes von den symmetrischen Funktionen, den wir hier mitgeteilt haben, bietet zugleich ein Mittel, um solche Funktionen wirklich zu bilden, freilich meist nicht ohne sehr weitläufige Rechnungen. Betrachten wir z. B. für $n = 3$ die Funktion

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

die offenbar symmetrisch ist. Sind

$$-a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad -a_3 = x_1 x_2 x_3$$

die symmetrischen Grundfunktionen, so sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der kubischen Funktion

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

und x_2, x_3 sind die Wurzeln der quadratischen Funktion

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^2 + (x_1 + a_1)\,x + (x_1^2 + a_1 x_1 + a_2),$$

woraus sich ergibt

$$x_2 + x_3 = -(x_1 + a_1), \quad x_2 x_3 = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3x_1^2 + 2a_1 x_1 + a_2,$$
$$(x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 = -3x_1^2 - 2a_1 x_1 - (4a_2 - a_1^2),$$

und daraus folgt:

$$-D = (3x_1^2 + 2a_1 x_1 + a_2)^2 (3x_1^2 + 2a_1 x_1 + 4a_2 - a_1^2).$$

Wenn man hierin x für x_1 schreibt und dann durch $f(x)$ dividiert, so gibt der Rest dieser Division, der von x unabhängig sein muß, den gesuchten Ausdruck für D.

Man kann die Rechnung dadurch etwas vereinfachen, daß man $(3x_1^2 + 2a_1 x_1 + a_2)^2$ durch Benutzung der Gleichung $f(x_1) = 0$ zunächst auf den zweiten Grad reduziert, wodurch man erhält:

$$(a_1^2 - 3a_2)\,x_1^2 + (a_1 a_2 - 9a_3)\,x_1 + (a_2^2 - 3a_1 a_3).$$

Dies ist mit $(3x_1^2 + 2a_1 x_1 + 4a_2 - a_1^2)$ zu multiplizieren und dann erst die Division auszuführen. Auf diese Weise läßt sich die Rechnung in kurzer Zeit durchführen und gibt das Resultat:

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Dieser Ausdruck D heißt die Diskriminante der kubischen Funktion $f(x)$. Ihr Verschwinden zeigt an, daß von den drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 zwei einander gleich sind.

§ 65. Die Potenzsummen.

1. Um symmetrische Funktionen durch die Grundfunktionen darzustellen, gibt es in besonderen Fällen noch einfachere Mittel. Wir wollen einen besonders wichtigen Fall dieser Art noch betrachten.

Wir setzen

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = \varphi_1(x), \quad \frac{f(x)}{x - x_2} = \varphi_2(x), \cdots, \quad \frac{f(x)}{x - x_n} = \varphi_n(x),$$

(1) $f'(x) = n x^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + (n-2)\,a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1},$

und wir haben dann (nach § 61, 4.)

$$\varphi_1(x_1) = f'(x_1), \quad \varphi_1(x_2) = 0, \cdots, \quad \varphi_1(x_n) = 0,$$

und entsprechendes gilt für $\varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$.

Die Summe dieser Funktionen:

$$F(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n}$$

oder

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x)$$

ist aber eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und es ist

$$F(x_1) = f'(x_1), \ F(x_2) = f'(x_2), \cdots F(x_n) = f'(x_n).$$

Die Differenz $F(x) - f'(x)$ ist also gleichfalls eine ganze Funktion, höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, die für $x = x_1, x_2, \cdots x_n$, also für n Werte verschwindet, und die daher nach dem Satz (§ 61, 5.) identisch verschwinden muß. Wir haben daher die identische, d. h. für alle x gültige Gleichung

$$\frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n} = f'(x). \tag{2}$$

2. Setzen wir

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1},$$

so ist nach § 64, 4.

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + a_2 x_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

und daraus erhält man die übrigen Glieder der Summe (2), wenn man x_1 durch $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ ersetzt.

Wenn wir mit $\Sigma q_1, \Sigma q_2, \ldots \Sigma q_{n-1}$ die Summe der so gebildeten entsprechenden q bezeichnen, so ergibt die Gleichung (2)

$$n x^{n-1} + x^{n-2} \Sigma q_1 + x^{n-3} \Sigma q_2 + \cdots + \Sigma q_{n-1} = f'(x),$$

und die Vergleichung mit dem Ausdruck (1) von $f'(x)$ ergibt

$$(n-1) a_1 = \Sigma q_1, \ (n-2) a_2 = \Sigma q_2, \cdots, \ a_{n-1} = \Sigma q_{n-1}. \tag{4}$$

Nun führen wir die unter dem Namen der Potenzsummen bekannten symmetrischen Funktionen ein, indem wir setzen

$$(5)\qquad \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_k &= x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \end{aligned}$$

und wenn man also nach (3) die Summe Σq_i bildet, so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= s_1 + n a_1, \\ \Sigma q_2 &= s_2 + s_1 a_1 + n a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma q_{n-1} &= s_{n-1} + s_{n-2} a_1 + s_{n-3} a_3 + \cdots + n a_{n-1}, \end{aligned}$$

und dies in (4) eingesetzt ergibt:

$$(6)\qquad \begin{aligned} 0 &= s_1 + a_1, \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2, \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3 a_3, \\ 0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4 a_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \cdots + (n-1) a_{n-1}. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ als Funktionen der $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ leicht eine nach der anderen berechnen. Man erhält z. B.

$$\begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ s_3 &= -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\ s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und aus den Potenzsummen lassen sich viele andere symmetrische Funktionen leichter als auf dem anderen Wege berechnen.

3. Man kann aber auch ebenso die symmetrischen Grundfunktionen durch die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ ausdrücken, z. B.:

$$\begin{aligned} a_1 &= -s_1, \\ 2a_2 &= s_1^2 - s_2, \\ 2 \cdot 3a_3 &= -s_1^3 + 3s_1 s_2 - 2s_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und es ist daher auch eine Funktion $f(x)$ vollständig bestimmt, wenn $a_0 = 1$ und die Potenzsummen der Wurzeln gegeben sind, und man kann jede symmetrische Funktion auch als Funktion der $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ ausdrücken.

Während aber die Ausdrücke der s durch die a, wie man sieht, in ihren Koeffizienten nur ganze Zahlen haben, enthalten die Ausdrücke der a durch die s auch Brüche.

4. Aus den Gleichungen (6) lassen sich nur die Potenzsummen s_k bilden, so lange $k < n$ ist. Sehr leicht erhält man aber auch Gleichungen für $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, wenn man die Summen bildet:

$$\Sigma f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1 f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1^2 f(x_1) = 0 \cdots,$$

nämlich

$$\begin{aligned} 0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n, \\ 0 &= s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdots + a_n s_1, \\ 0 &= s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \cdots + a_n s_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ja man kann auf dem gleichen Wege $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ berechnen, wenn man $\Sigma x_1^{-1} f(x_1) = 0$, $\Sigma x_1^{-2} f(x_1) = 0, \cdots$ bildet:

$$\begin{aligned} 0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \cdots + a_n s_{-1}, \\ 0 &= s_{n-2} + a_1 s_{n-3} + \cdots + a_n s_{-2}, \end{aligned}$$

worin s_0 immer gleich n zu setzen ist. In den Ausdrücken der $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ durch die a treten dann aber Potenzen von a_n als Nenner auf[1]).

5. Wir wollen einige Beispiele betrachten. Soll die symmetrische Funktion $\Sigma x_1^2 x_2^2$ bestimmt werden, d. h. die Summe der Produkte der Quadrate der x_i zu je zweien, so können wir von der Formel Gebrauch machen:

$$(\Sigma x_1^2)^2 = 2\Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^4$$

oder

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^2 x_2^2 &= \tfrac{1}{2}(s_2^2 - s_4) \\ &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4. \end{aligned}$$

Eine andere Aufgabe, die durch die Potenzsummen gelöst werden kann, ist die: Es ist

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

eine gegebene Funktion von x vom n^{ten} Grade. Es soll eine Funktion

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n$$

gefunden werden, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x)$ sind.

---

1) Die ersten Ausdrücke für Potenzsummen gab Albert Girard in dem Werke „Invention nouvelle en l'algèbre" (1629). Sie wurden dann von Newton verallgemeinert (Arithmetica universalis 1707). Daher sind die Formeln (6) unter dem Namen der Newtonschen Formeln bekannt.

Wenn $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Potenzsummen der Wurzeln von $f(x)$ sind, so sind $s_2, s_4, s_6, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Potenzsummen der Wurzeln von $F(x)$, und die Formeln in Nr. 3 ergeben für die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_1 &= - s_2, \\ 2A_2 &= s_2^2 - s_4, \\ 6A_3 &= - s_2^3 + 3s_2 s_4 - 2s_6, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus kann man mit Hilfe der Formeln in Nr. 2 die $A_1, A_2, \ldots$ durch die $a_1, a_2, \ldots$ ausdrücken, und erhält z. B.

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^2 - 2a_2, \\ A_2 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4, \end{aligned}$$

sodaß, wie es sein muß, A_2 mit dem oben gefundenen Ausdruck $\Sigma x_1^2 x_2^2$ identisch ist.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn es sich darum handelt, aus $f(x)$ eine Funktion $F(x)$ abzuleiten, deren Wurzeln irgend welche, etwa die k^{ten} Potenzen von den Wurzeln von $f(x)$ sind. Die Potenzsummen der Wurzeln von $F(x)$ sind dann $s_k, s_{2k}, s_{3k}, \ldots$, und daraus lassen sich die Koeffizienten von $F(x)$ nach Nr. 3 zusammensetzen.

6. Man kann noch auf einem anderen Wege die Koeffizienten der Funktion $F(x)$, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x)$ sind, bestimmen. Setzen wir nämlich $x^2 = y$, so verschwindet immer eine der beiden Funktionen $f(\sqrt{y})$, $f(-\sqrt{y})$, wenn für y eine Wurzel von $F(x)$ gesetzt wird. Es ist also

$$F(y) = \pm f(\sqrt{y})\ f(-\sqrt{y}),$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Nun läßt sich $f(x)$ in zwei Summanden $f_1(x) + xf_2(x)$ zerlegen, von denen der erste $f_1(x)$ die geraden, der zweite $xf_2(x)$ die ungeraden Potenzen von x enthält, und es ist dann

$$\begin{aligned} F(y) &= \pm \left(f_1(\sqrt{y}) + \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right) \left(f_1(\sqrt{y}) - \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right) \\ &= \pm \left[\left(f_1(\sqrt{y})\right)^2 - y\left(f_2(\sqrt{y})\right)^2\right]. \end{aligned}$$

In der letzten Form kommt keine ungerade Potenz von $\sqrt{y}$ mehr vor. Ist z. B. n eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots, \\ f_2(x) &= a_1 x^{n-2} + a_3 x^{n-4} + \cdots, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$F(x) = \left(y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + a_4 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$- y\left(a_1 y^{\frac{n-2}{2}} + a_3 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$= y^n + (2a_2 - a_1^2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + \cdots.$$

Bei diesem Verfahren ist die Rechnung noch etwas einfacher als bei Benutzung der Potenzsummen.

§ 66. Fundamentalsatz von der Wurzelexistenz.

1. Wir haben im früheren gesehen, daß man immer die n Koeffizienten einer ganzen Funktion $f(x)$ so bestimmen kann, daß diese Funktion n beliebig gegebene Größen zu Wurzeln hat, und man kann daher in gewissem Sinne sagen, daß die Mannigfaltigkeit der Funktionen mit n Wurzeln ebenso groß ist, wie die Mannigfaltigkeit aller Funktionen $f(x)$, die man überhaupt bilden kann. Damit ist aber natürlich nicht wirklich bewiesen, daß diese beiden Mannigfaltigkeiten sich vollkommen decken; mit anderen Worten, es ist noch nicht bewiesen, daß eine Funktion n^{ten} Grades immer n Wurzeln hat.

Es würde genügen, wenn wir beweisen könnten, daß für jedes n jede Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ wenigstens eine (reelle oder komplexe) Wurzel hat. Denn ist eine solche Wurzel α, so hat die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f(x)/(x-\alpha)$ ebenfalls eine Wurzel β u. s. f., und man schließt daraus, daß $f(x)$ in n lineare Faktoren zerlegbar ist.

Wir brauchen uns bei der Funktion $f(x)$ nicht auf reelle Koeffizienten zu beschränken. Wenn wir aber die Existenz einer Wurzel für jede Funktion mit reellen Koeffizienten nachgewiesen haben, so folgt sie auch für Funktionen mit komplexen Koeffizienten. Denn sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei Funktionen, deren Koeffizienten konjugiert imaginär sind, so hat $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ reelle Koeffizienten. Hat nun $f(x)$ eine Wurzel α_1, so ist entweder $f_1(\alpha_1) = 0$ oder $f_2(\alpha_1) = 0$. Nehmen wir an, es sei $f_1(\alpha_1) = 0$, so ist $f_2(\alpha_2) = 0$, wenn α_2 die zu α_1 konjugierte Zahl ist, und es hat also sowohl $f_1(x)$ als $f_2(x)$ eine Wurzel. Hiernach bleibt uns noch übrig, den folgenden Satz zu beweisen:

> Jede ganze Funktion $f(x)$ mit reellen Koeffizienten hat wenigstens eine reelle oder komplexe Wurzel.

Dieser Satz ist so wichtig, daß man ihn den Fundamentalsatz der Algebra genannt hat. Der erste, der ihn bewiesen hat, ist Gauß. Er hat von dem Satze drei auf ganz verschiedenen Grundlagen beruhende Beweise gegeben.

Der zweite und dritte dieser Beweise können nicht mit elementaren Mitteln dargestellt werden. Der erste aber, den Gauß zuerst in seiner Doktordissertation (1799) und 50 Jahre später (1849) in wesentlich vereinfachter und verbesserter Form veröffentlicht hat, ist so einfach und anschaulich, daß es wohl möglich sein dürfte, ihn auch mit nur elementaren Kenntnissen zu verstehen. Bei dem Versuch, ihn in dieser Weise darzustellen, folgen wir der zweiten Fassung.

Daß wir uns dabei auf die Annahme reeller Koeffizienten in $f(x)$ beschränken, geschieht nur im Interesse einer etwas einfacheren Bezeichnung. Nach der oben gemachten Bemerkung liegt darin keine sachliche Beschränkung.

2. Es sei also

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n \tag{1}$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von z, und die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ seien gegebene reelle Zahlen. Es ist nachzuweisen, daß es eine reelle oder imaginäre Zahl gibt, die, für z gesetzt, $f(z)$ zu Null macht. Wir setzen

$$z = x + iy$$

und stellen z nach § 47 durch die Punkte einer Ebene dar. Es sind dann x, y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene, den wir den Punkt z nennen.

Dann hat in jedem Punkt dieser Ebene die Funktion $f(z)$ einen bestimmten Wert, und es ist zu zeigen, daß es wenigstens einen Punkt gibt, in dem $f(z)$ den Wert Null hat. Ein solcher Punkt mag ein Wurzelpunkt von $f(z)$ heißen. Trennen wir in $f(z)$ den reellen von dem imaginären Teil, so möge sich

$$f(z) = X + iY \tag{2}$$

ergeben, und man kann X und Y leicht bilden, indem man den binomischen Satz auf die Potenzen von $x + iy$ anwendet. Einfachere Formeln ergeben sich aber, wenn man Polarkoordinaten anwendet, aus dem Moivreschen Satz. Setzt man nämlich

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$
$$(x + iy)^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi),$$

so erhält man (§ 47, 8.)

$$\begin{aligned} X &= r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \cdots + a_n, \\ Y &= r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \cdots + a_{n-1} r \sin\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Es soll hier noch ein anderer Ausdruck für X und Y angeführt werden, aus dem wir gleich einen Schluß ziehen werden, der für das Folgende wichtig ist.

Wir setzen (vgl. den Abschnitt über Trigonometrie)

$$t = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$z = r\,\frac{(1+it)^2}{1+t^2},$$

und daraus folgt

$$(1+t^2)^n(X+iY) = r^n(1+it)^{2n} + a_1 r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2) + \cdots + a_n(1+t^2)^n,$$

und wenn wir auf die einzelnen Glieder den binomischen Satz anwenden und nach t ordnen:

$$(4) \qquad X = \frac{F(t)}{(1+t^2)^n}, \quad Y = \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n},$$

worin $F(t)$ und $\Phi(t)$ ganze Funktionen von t von den Graden $2n$ und $2n-1$ (höchstens) sind. (Außerdem sind $F(t)$, $\Phi(t)$ ganze Funktionen von r vom Grade n.)

4. Alle Punkte der xy-Ebene, denen ein konstanter Wert von r entspricht, liegen auf einem Kreise mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt. Wir wollen diesen Kreis mit (r) bezeichnen. Will man die Punkte ermitteln, in denen eine der Funktionen X, Y auf einem solchen Kreise verschwindet, so hat man die Gleichungen $F(t) = 0$, $\Phi(t) = 0$ für ein gegebenes r zu lösen und zu beachten, daß zu jedem Wert von t ein Wert von $\cos\varphi$ und von $\sin\varphi$, also ein Punkt des Kreises gehört.

Bei der Funktion Y kommt noch der Wert $t = \infty$, d. h. $\varphi = \pi$ hinzu. Aus den Graden der Funktionen $F(t)$, $\Phi(t)$ schließen wir alsdann den Satz:

Jede der beiden Funktionen X, Y kann auf einem Kreise (r) höchstens in $2n$ Punkten Null werden.

Daraus folgt, daß keine der Funktionen X, Y in einem Flächenstück überall gleich Null sein kann.

Denn durch ein solches Flächenstück könnte man immer einen Kreisbogen legen, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt liegt, und auf diesem würde dann X oder Y in unendlich vielen Punkten verschwinden.

5. Die Wurzelpunkte der Funktion $f(z)$ sind die Punkte, in denen gleichzeitig

$$X = 0, \quad Y = 0$$

wird. Beim Nachweis der Existenz solcher Punkte stützen wir uns auf die Stetigkeit dieser Funktionen, die darin ihren Ausdruck findet:

Sind c_1, c_2 zwei Punkte, in denen die Funktion X entgegengesetzte Vorzeichen hat, so liegt auf jeder (geraden oder krummen) Linie, die die beiden Punkte c_1, c_2 verbindet, wenigstens ein Punkt, in dem X verschwindet.

Gleiches gilt für die Funktion Y.

6. Wir knüpfen die ferneren Betrachtungen zunächst an die Funktion Y an und stellen folgenden Satz auf:

Man kann r so groß annehmen, daß die Funktion Y auf dem Kreise (r) im Vorzeichen mit $\sin n\varphi$ übereinstimmt, wenigstens überall da, wo $\sin n\varphi$ dem absoluten Werte nach über einer beliebig kleinen gegebenen Zahl ϑ liegt.

Man sieht dies sofort ein, wenn man Y in die Form setzt:

$$Y = r^n \left(\sin n\varphi + \frac{a_1}{r} \sin (n-1)\varphi + \frac{a_2}{r^2} \sin (n-2)\varphi + \cdots\right),$$

worin man dann r so groß annehmen kann, daß die Summe aller auf das erste folgenden Glieder absolut kleiner ist als eine beliebige Größe, also auch kleiner als ϑ, und dann entscheidet das erste Glied über das Vorzeichen.

Hieraus ergibt sich folgendes:

Wir markieren auf einer Kreisperipherie (r) die Punkte, in denen

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

ist und bezeichnen diese Punkte durch die Ziffern

$$0, 1, 2, \ldots 2n-1.$$

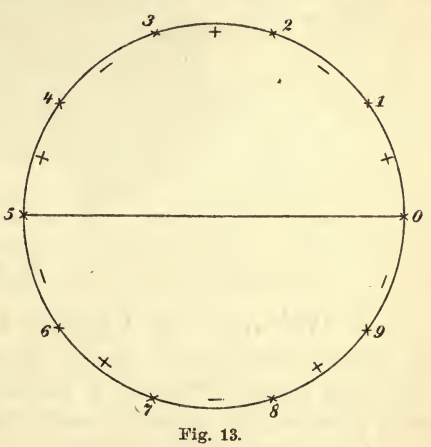


Fig. 13.

Wir erhalten dann auf der Kreisperipherie $2n$ Intervalle

$$(0\,1), (1\,2), (2\,3), \ldots, (2n-1, 0),$$

in denen $\sin n\varphi$ abwechselnd positiv und negativ ist. (Fig. 13 zeigt diese Einteilung für den Fall $n = 5$.)

Schließen wir also die nächste Nachbarschaft der Teilpunkte aus und nehmen r hinlänglich groß, so ist in diesen Intervallen auch Y abwechselnd positiv und negativ[1]).

Daraus folgt nach 5., daß Y in der Nachbarschaft eines jeden Teilpunktes durch Null gehen muß und nach 4. kann es in keinem anderen Punkte der Kreisperipherie Null werden.

1) Was wir hier die Nachbarschaft der Teilpunkte nennen, sind die Strecken auf dem Kreise (r), in denen

$$\frac{k\pi}{n} - \frac{\eta}{n} < \varphi < \frac{k\pi}{n} + \frac{\eta}{n}$$

ist, wenn $\vartheta = \sin\eta$ gesetzt ist. Die Bogenlänge eines dieser ausgeschlossenen Stücke des Kreises (r) ist also $2\eta r/n$.

Da auch das Vorzeichen von X (bei hinlänglich großem r) durch das Vorzeichen des ersten Gliedes $r^n \cos n\varphi$ bestimmt wird, so ergibt sich weiter, daß X in der Nachbarschaft der geraden Teilpunkte $0, 2, 4, \ldots 2n-2$ und in diesen Teilpunkten selbst positiv, in den ungeraden Teilpunkten $1, 3, 5, \ldots 2n-1$ negativ ist.

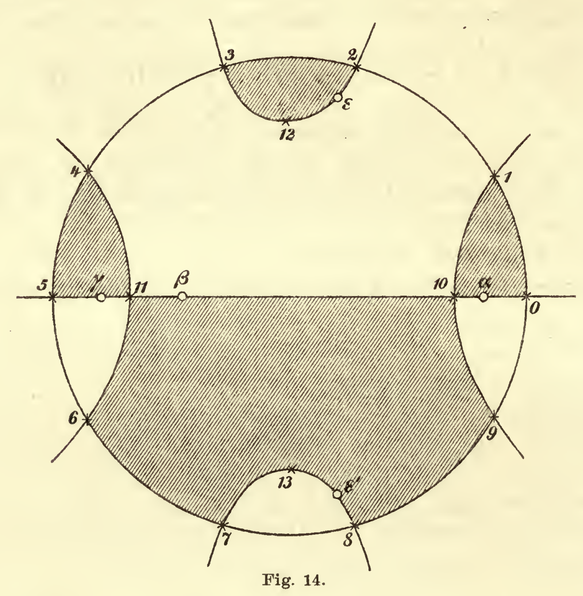


Fig. 14.

7. Wie wir in Nr. 4 gesehen haben, ist es nicht möglich, daß Y in einem Flächenstück überall verschwindet. Folglich ist die Ebene in Felder geteilt, in denen Y positiv und negativ ist, und diese Felder sind voneinander getrennt durch Linien, in denen Y verschwindet.

Von einem der Intervalle $(2h, 2h+1)$ des Kreises (r), in dem Y positiv ist, erstreckt sich nun zunächst ein Flächenstreifen, in dem Y positiv bleibt, außerhalb des Kreises (r), und dieser Streifen schließt sich um so mehr dem Sektor von $\varphi = 2h\pi/n$ bis $\varphi = (2h+1)\pi/n$ an, je weiter er sich vom Mittelpunkt entfernt. Dieses Flächenstück, in dem Y positiv bleibt, muß sich aber noch ins Innere des Kreises fortsetzen. Den Teil, der im Innern des Kreises liegt, bezeichnen wir mit H. Hierbei sind mehrere Formen zu unterscheiden, wobei Flächenstücke, die sich nur in einzelnen Punkten berühren, als nicht zusammenhängend betrachtet werden.

Entweder H endigt im Innern des Kreises und hat also außer $(2h, 2h+1)$ keinen Teil der Kreisperipherie zur Grenze, oder es erstreckt sich H bis zu einem andern Intervall $(2k, 2k+1)$ oder es

teilt sich H in zwei oder mehr Äste, deren jeder an einem Intervall $(2l, 2l+1)$ endigt.

Ein Beispiel des ersten Verhaltens geben in unserer Figur 14 die Flächen (0, 1, 10) oder (2, 3, 12). Das zweite Verhalten zeigt (8, 9, 10, 11, 6, 7). Die Teilung in mehrere Äste kommt in diesem einfachen Beispiel nicht vor.

Es wäre auch denkbar, daß im Innern einer der Flächen H ein Flächenstück wie eine Insel liegt, in dem Y wieder negativ wäre; ein solches Verhalten (was übrigens nebenbei bemerkt nicht vorkommen kann), würde aber unsern Schluß auch nicht stören.

8. Wir denken uns nun die Begrenzung einer Fläche H in dem Sinne durchwandert, daß man das Innere von H immer zur Linken hat. Dann wird jedes Intervall des Kreises, das in dieser Begrenzung vorkommt, in dem also Y positiv sein muß, ebenfalls so durchwandert, daß das Kreis-Innere zur Linken liegt, d. h. von einem geraden Teilpunkt nach dem nächstfolgenden ungeraden. Der Weg um H herum verläßt also die Kreisperipherie bei ungeraden Teilpunkten und trifft sie wieder bei geraden Teilpunkten.

Betrachten wir einen Teil S dieses Weges, der von dem Punkt $2h+1$ durch das Innere bis zu einem Punkt $2k$ führt, so ist längs S überall $Y=0$. Im Punkt $2h+1$ ist aber X negativ und im Punkt $2k$ ist X positiv. Folglich muß X auf dem Wege S wenigstens in einem Punkt gleich Null werden, und dieser Punkt ist ein Wurzelpunkt, dessen Existenz somit nachgewiesen ist. Zum bessern Verständnis vergleiche man die Figur 12, die der Annahme

$$f(z) = z^5 - 4z - 2$$

ungefähr entspricht.

Auf dem Wege (1, 10, 0) liegt der Wurzelpunkt α,
auf dem Wege (3, 12, 2) liegt ε,
auf (5, 11, 4) liegt γ,
auf (9, 10, 11, 6) liegt β,
auf (8, 13, 7) liegt ε'.

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grades.

§ 67. Zahlenkongruenzen.

1. Wie wir früher gesehen haben (§ 14) kann man, wenn m und n zwei beliebige natürliche Zahlen sind, die Zahlen q und r so bestimmen, daß

$$m = qn + r$$

ist. Hierin ist q Null oder positiv, und r genügt der Bedingung

$$0 \overline{\overline{<}} r < n.$$

Die Zahl r heißt der Rest von m nach n. Er kann bei gegebenem n nur einen der n Werte haben:

$$(1) \qquad 0, \ 1, \ 2, \ldots n-1.$$

Zwei Zahlen m und m', die denselben Rest haben, heißen restgleich oder kongruent nach dem Modul n. Es ist dann

$$m' = q'n + r$$

und folglich

$$m - m' = (q - q')\, n,$$

also $m - m'$ durch n teilbar.

Es gilt auch das Umgekehrte, daß nämlich zwei Zahlen m, m', deren Differenz $m - m'$ durch n teilbar ist, restgleich sind. Denn setzen wir

$$m = qn + r, \quad m' = q'n + r',$$

so wird

$$m - m' = (q - q')\, n + r - r'.$$

Wenn nun $m - m'$ durch n teilbar ist, so muß hiernach auch $r - r'$ durch n teilbar (oder $= 0$) sein. Da aber r und r' beide der Zahlenreihe (1) angehören, so kann ihre Differenz dem absoluten Werte nach nicht größer als $n - 1$ sein, und kann also, wenn sie von Null verschieden ist, nicht durch n teilbar sein. Folglich ist $r = r'$.

2. Die Eigenschaft zweier Zahlen, kongruent zu sein, deutet man nach Gauß durch das Zeichen an:

$$m \equiv m' \pmod{n}$$

(spr. m kongruent mit m' nach dem Modul n oder auch kürzer nach n). Eine solche Formel wird eine Kongruenz (Zahlenkongruenz) genannt.

Der Name hat mit dem geometrischen Begriff der Kongruenz nichts zu tun.

Jede Zahl ist mit ihrem Rest nach dem Divisor als Modul kongruent.

$$m \equiv r \ (\text{mod. } n).$$

Wenn der Modul im Verlauf einer Rechnung nicht geändert wird, so kann man ihn in der Bezeichnung bisweilen weglassen, ohne ein Mißverständnis befürchten zu müssen. In diesem Sinne sind die folgenden Kongruenzen zu verstehen.

3. Für das Rechnen mit kongruenten Zahlen sind die folgenden Sätze wichtig:

Ist

$$a \equiv \alpha \quad \text{und} \quad b \equiv \beta,$$

so ist auch

$$a + b \equiv \alpha + \beta,$$
$$a - b \equiv \alpha - \beta,$$
$$ab \equiv \alpha\beta.$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Sätze sofort aus den Formeln:

$$(a + b) - (\alpha + \beta) = (a - \alpha) + (b - \beta),$$
$$(a - b) - (\alpha - \beta) = (a - \alpha) - (b - \beta),$$
$$ab - \alpha\beta = (a - \alpha + \alpha)(b - \beta + \beta) - \alpha\beta$$
$$= (a - \alpha)(b - \beta) + \beta(a - \alpha) + \alpha(b - \beta),$$

woraus hervorgeht, daß wenn $a - \alpha$ und $b - \beta$ durch n teilbar sind, auch die Differenzen $(a \pm b) - (\alpha \pm \beta)$, $ab - \alpha\beta$ durch n teilbar sind, wie diese Sätze verlangen.

4. Ist

$$a \equiv \alpha, \quad ab \equiv \alpha\beta$$

und zugleich a und α relativ prim zu n, so ist auch

$$b \equiv \beta,$$

denn es ist

$$ab - \alpha\beta = a(b - \beta) + \beta(a - \alpha),$$

und wenn daher $ab - \alpha\beta$ und $a - \alpha$ durch n teilbar sind, so ist

auch $a(b-\beta)$ durch n teilbar. Ist also a relativ prim zu n, so ist $b-\beta$ durch n teilbar (§ 15, 6.).

5. Durch wiederholte Anwendung des Multiplikationssatzes in Nr. 3 ergibt sich, wenn h eine beliebige positive Zahl ist:

Ist $a \equiv \alpha$, so ist auch $a^h \equiv \alpha^h$.

6. Da es nur n verschiedene Reste nach dem Modul n gibt, so müssen unter mehr als n Zahlen immer wenigstens zwei untereinander kongruente vorkommen. Dagegen kann man auf unendlich viele verschiedene Arten n Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n \tag{2}$$

so auswählen, daß nicht zwei darunter kongruent sind; man braucht nur zu jeder der Zahlen (1) irgend ein beliebiges Vielfaches von n hinzuzufügen. Die Zahlen eines solchen Systems (2) geben bei der Division durch n zusammen alle möglichen Reste (1) und jeden nur einmal. Darum heißt jedes solche System ein volles Restsystem für den Modul n. Wenn für ein unbestimmtes Zeichen x nacheinander alle Zahlen eines Systems (2) gesetzt werden, so sagen wir, x durchläuft ein volles Restsystem.

7. Wenn m und n relative Primzahlen sind, so muß auch r zu n relativ prim sein, denn ein gemeinsamer Teiler von n und r wäre auch Teiler von $m = qn + r$. Aus der Reihe der möglichen Reste (1) fallen dann noch einige aus; jedenfalls unter allen Umständen der Rest 0.

Wir bezeichnen die Anzahl der in (1) enthaltenen relativen Primzahlen zu n mit ν, oder um die Abhängigkeit von n deutlicher auszudrücken, mit $\varphi(n)$, setzen also

$$\nu = \varphi(n)$$

und bezeichnen die in (1) enthaltenen relativen Primzahlen zu n mit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_\nu, \tag{3}$$

unter denen jedenfalls die Zahl 1 enthalten ist.

Das Zeichen $\varphi(n)$ bedeutet also die Anzahl der positiven Zahlen, die kleiner als n und zugleich teilerfremd zu n sind.

Wir geben ein paar Beispiele für die Reihe (3):

$n = 7.$	1, 2, 3, 4, 5, 6.	$\varphi(7) = 6.$
$n = 13.$	1, 2, 3, 4, 5, 6.	
	7, 8, 9, 10, 11, 12.	$\varphi(13) = 12.$
$n = 21.$	1, 2, 4, 5, 8, 10,	
	11, 13, 16, 17, 19, 20.	$\varphi(21) = 12.$

8. Ist n eine Primzahl, so sind alle Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ zu n teilerfremd, und es ist folglich in diesem Falle

$$\varphi(n) = n - 1.$$

Ist aber n eine Potenz einer Primzahl p, so hat man, um die Reihe (3) zu erhalten, aus $0, 1, 2, \ldots n-1$ alle durch p teilbaren Zahlen

$$0, \quad p, \quad 2p, \cdots \left(\frac{n}{p} - 1\right) p,$$

deren Anzahl n/p beträgt, auszuscheiden. Demnach ist für diesen Fall

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

9. Wenn sich n in zwei Faktoren a, b zerlegen läßt, die zueinander teilerfremd sind, so setzen wir

$$z = ay - bx.$$

Hierin bedeute

x jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots a-1,$

y „ „ „ $0, 1, 2, \ldots b-1.$

z stellt dann im ganzen $ab = n$ Zahlen dar, unter denen keine zwei nach n denselben Rest geben. Denn wäre

$$z - z' = a(y - y') - b(x - x')$$

durch n teilbar, so müßte $b(x - x')$, und da b relativ prim zu a ist, auch $x - x'$ durch a teilbar sein, und da x und x' kleiner als a sind, so müßte $x - x' = 0$, also $x = x'$ sein, und ebenso schließt man, daß $y = y'$ sein müßte. Demnach erhält man, wenn man die Reste von z nach n sucht, jeden der Reste

(4) $$0, \quad 1, \quad 2, \ldots n-1$$

und jeden nur einmal.

Nun ist aber z dann und nur dann relativ prim zu n, wenn x relativ prim zu a und y relativ prim zu b ist. Denn eine Primzahl, die in a und z aufgeht, muß in x, und eine, die in b und z aufgeht, in y aufgehen. Will man also aus der Reihe (4) der Reste von z die ausscheiden, die mit n einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so hat man aus der Reihe der Zahlen x die auszuscheiden, die mit a und aus der Reihe der Zahlen y die, die mit b einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Es bleiben also $\varphi(a)$ Zahlen x und $\varphi(b)$ Zahlen y und $\varphi(n)$ Zahlen z, und es folgt, da jedes dieser x mit jedem y kombiniert werden kann,

$$\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

Enthält also z. B. n nur zwei Primfaktoren p, q, so ergibt sich, in welcher Potenz auch p und q in n aufgehen mögen,

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

und diese Formel läßt sich durch die vollständige Induktion dahin verallgemeinern:

Sind $p, q, r, \ldots$ die sämtlichen von einander verschiedenen Primzahlen, die in n aufgehen, so ist:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\cdots.$$

Hiernach ist z. B.

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16,$$

$$\varphi(63) = 63\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 36.$$

§ 68. Die Potenzreste.

1. Es seien jetzt n und g zwei Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler (g Abkürzung für „Grundzahl". Bei Anwendungen auf das dekadische Ziffernsystem wird $g = 10$ genommen). Wir bilden die aufeinanderfolgenden Potenzen von g:

(1) $$g^0, \quad g^1, \quad g^2, \quad g^3, \cdots$$

($g^0 = 1$) und suchen die Reste nach n

(2) $$\varrho_0, \quad \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \cdots.$$

Da g und alle seine Potenzen zu n teilerfremd sind, so sind auch die ϱ teilerfremd zu n, und da sie zugleich kleiner als n sind, so gibt es unter ihnen höchstens $\nu = \varphi(n)$ voneinander verschiedene.

Ist aber $\varrho_k = \varrho_{k+f}$, worin f eine positive Zahl sei, so ist

$$g^{k+f} - g^k = g^k(g^f - 1)$$

durch n teilbar, und folglich ist auch $g^f - 1$ durch n teilbar. Es gibt also positive Exponenten f, für die

(3) $$g^f \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, und wir wollen von jetzt an mit f die kleinste unter diesen positiven Zahlen bezeichnen.

2. Aus (3) folgt, wenn q eine beliebige positive ganze Zahl ist (nach § 67, 5.),

$$g^{qf} \equiv 1,$$

und es folgt auch umgekehrt:

Ist für irgend einen positiven Exponenten k

$$g^k \equiv 1,$$

so ist k ein Vielfaches von f. Denn wäre k nicht durch f teilbar, so könnte man

$$k = qf + f'$$

setzen, worin $0 < f' < f$ wäre. Es folgt dann

$$g^{qf} g^{f'} \equiv 1$$

und folglich nach § 67, 4. $g^{f'} \equiv 1$. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, daß f der kleinste positive Exponent sei, für den die Kongruenz (3) erfüllt ist.

3. Von den f Potenzen

$$(4) \qquad g^0, \quad g^1, \quad g^2, \ldots g^{f-1}$$

können nicht zwei denselben Rest nach n geben, weil sich sonst eine kleinere Zahl f' ergeben würde, für die $g^{f'} \equiv 1$ wäre. Wir erhalten also daraus f verschiedene Reste

$$(5) \qquad \varrho_0, \quad \varrho_1, \quad \varrho_2, \ldots \varrho_{f-1}$$

(worin $\varrho_0 = 1$ ist). Geht man aber weiter zu höheren Potenzen g^f, g^{f+1}, g^{f+2}, ..., so bekommt man dieselben Reste in derselben Reihenfolge wieder, und man kommt also aus dem System (5) durch Potenzieren von g niemals heraus. Die $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_{f-1}$ heißen die Potenzreste von g; sie sind alle relativ prim zu n. Wenn nun f kleiner als $\varphi(n)$ ist, so gibt es wenigstens noch einen Rest r_1, der nicht unter den Potenzresten enthalten ist, und dann sind die Reste von

$$(6) \qquad r_1 g^0, \quad r_1 g^1, \quad r_1 g^2, \ldots r_1 g^{f-1}$$

alle sowohl untereinander als auch von den Resten der Potenzen (4) verschieden. Denn wäre

$$r_1 g^h \equiv g^k,$$

so würde folgen:

$$r_1 \equiv g^{k-h} \quad (\text{oder wenn } k < h \text{ ist, } \equiv g^{f-h+k}),$$

und dies widerspricht der Annahme, daß r_1 nicht unter den Resten von (4) vorkommt.

Demnach ergibt auch die Reihe (6) lauter verschiedene Reste, und es ist $2f \overline{\lessgtr} \varphi(n)$. Ist $2f < \varphi(n)$, so gibt es einen Rest r_2, der unter den Resten von (4) und von (6) nicht vorkommt. Die Zahlen

$$r_2 g^0, \quad r_2 g^1, \ldots r_2 g^{f-1}$$

geben wieder lauter verschiedene Reste, die auch von den Resten der Reihen (4) und (6) verschieden sind. Denn wäre etwa

$$r_1 g^h \equiv r_2 g^k,$$

so würde folgen:

$$r_2 \equiv r_1 g^{h-k} \quad (\text{oder } \equiv r_1 g^{f-k+h}),$$

d. h., es würde r_2 gegen die Voraussetzung in der Reihe (6) vorkommen. Es ist also jetzt $3f \overline{\gtrless} \varphi(n)$.

Man sieht, wie dieser Schluß fortzusetzen ist, und da die Vielfachen $f, 2f, 3f, \ldots$ nicht ins Unbegrenzte kleiner als $\varphi(n)$ bleiben können, so folgt, daß $\varphi(n)$ ein Vielfaches von f, also f ein Teiler von $\varphi(n)$ sein muß[1]). Wir setzen

$$\varphi(n) = ef,$$

und aus (4) ergibt sich der verallgemeinerte Fermatsche Satz

$$g^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

oder in Worten:

4. Die $\varphi(n)^{\text{te}}$ Potenz einer jeden zu n teilerfremden Zahl ist nach n mit 1 kongruent.

Ist n eine Primzahl, so ist $\varphi(n) = n - 1$ und der Satz lautet für diesen Fall:

5. Für jede Primzahl n ist die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz einer jeden durch n nicht teilbaren Zahl mit 1 kongruent.

Der § 55, 3. bewiesene Satz, daß, wenn n eine Primzahl und a eine beliebige ganze Zahl ist, $a^n - a = a(a^{n-1} - 1)$ durch n teilbar ist, ist, wie man sieht, in 5. enthalten, denn entweder ist a oder (nach 5.) $a^{n-1} - 1$ durch n teilbar.

Mag nun n eine Primzahl oder zusammengesetzt sein, so zerfallen nach 3. die zu n teilerfremden Reste von n in e Reihen von je f Gliedern, die wir die Perioden der Reste nennen wollen. Man erhält eine dieser Perioden, wenn man in einem Produkt rg^k für den Exponenten k die Zahlen $1, 2, 3, \ldots f-1$ setzt. Die Auffindung dieser Reste, die auf den ersten Blick sehr weitläufig erscheint, wird dadurch wesentlich vereinfacht, daß man den Rest von rg^k dadurch bilden kann, daß man nicht rg^{k-1} selbst, sondern seinen Rest nach n mit g multipliziert.

6. Nehmen wir z. B. $n = 17$, $g = 2$, so ergibt sich

$$2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8,$$
$$2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 15, \quad 2^6 \equiv 13, \quad 2^7 \equiv 9, \quad 2^8 \equiv 1.$$

Es ist also hier $f = 8$, $\varphi(17) = 16$ und wir bekommen zwei Perioden der Reste nach 17.

Nehmen wir $n = 17$, $g = 10$, so ergibt sich nur eine Periode; es ist $f = 16$. In der folgenden kleinen Tabelle stehen in der ersten

---

1) Man beachte die Analogie dieses Satzes mit dem Satze § 52, 4. über Permutationsgruppen.

Reihe die Exponenten der Potenzen von 10 und darunter die entsprechenden Reste nach 17.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

Für $n = 21$, $g = 10$ ergibt sich

$$10^0 \equiv 1,\ 10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 16,\ 10^3 \equiv 13,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 19,\ 10^6 \equiv 1,$$

und wir haben hier $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, also zwei Perioden. Nehmen wir noch zum Schluß $n = 13$, $g = 10$, so erhalten wir:

$$10^0 \equiv 1,\ 10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^4 \equiv 3,\ 10^5 \equiv 4,\ 10^6 \equiv 1;$$

also haben wir auch hier $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, also zwei Perioden.

Nehmen wir dagegen $n = 13$, $g = 2$, so ergibt sich eine Tabelle wie oben bei 17,

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7

also $f = 12$.

7. Wenn für irgend eine Wahl von g und n nur eine Periode vorhanden, also $f = \varphi(n)$ ist, so heißt g primitive Wurzel von n. Es ist also 10 eine primitive Wurzel von 17, dagegen nicht von 13 und nicht von 21, während 2 primitive Wurzel von 13, aber nicht von 17 ist. Es besteht der Satz, den wir aber hier nicht beweisen werden, daß alle ungeraden Primzahlen und Primzahlpotenzen sowie die mit 2 multiplizierten ungeraden Primzahlpotenzen primitive Wurzeln haben. Dagegen haben andere zusammengesetzte Zahlen keine primitiven Wurzeln, z. B. 21. Denn nach dem Fermatschen Satze ist $g^6 - 1$ für jedes g durch 3 und durch 7, also auch durch 21 teilbar.

Wenn g primitive Wurzel von n ist und $g^\alpha \equiv a \pmod{n}$, so heißt α der Index von a. In der oben angegebenen Tabelle stehen also in der ersten Reihe die Indices der darunter stehenden Zahl. Eine solche Tabelle heißt daher auch eine Indextabelle.

§ 69. Periodische Dezimalbrüche.

1. Die Theorie der Potenzreste gestattet eine Anwendung auf die Dezimalbrüche, durch die ein gemeiner Bruch dargestellt werden kann.

Es seien m und n positive relative Primzahlen und n nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar, also relativ prim zu 10. Wir betrachten den gemeinen Bruch

$$\gamma = \frac{m}{n}.$$

Ein solcher Bruch läßt sich, wie wir in § 26 gesehen haben, in einen unendlichen Dezimalbruch verwandeln, dessen Mantisse wir mit

$$Z(m) = z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots$$

bezeichnen. Zwei solche Brüche $\gamma = m/n$ und $\gamma' = m'/n$ mit demselben Nenner n haben dann und nur dann dieselbe Mantisse, wenn ihr Unterschied eine ganze Zahl ist, wenn sich also m' von m um ein Vielfaches von n unterscheidet, oder in Zeichen:

Ist

$$m \equiv m' \pmod{n},$$

so ist

$$Z(m) = Z(m')$$

und umgekehrt. Denn ist $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl, so besteht die Mantisse des diese Differenz darstellenden Dezimalbruches aus lauter Nullen, und ist umgekehrt $Z(m) = Z(m')$, so besteht die Mantisse $Z(m - m')$ aus lauter Nullen.

Da es $\varphi(n)$ verschiedene zu n teilerfremde Reste gibt, so gibt es also auch $\varphi(n)$ verschiedene Mantissen $Z(m)$ für denselben Nenner n. Hier hat φ dieselbe Bedeutung wie in § 67, 7.

2. Aus der Mantisse von γ erhält man die von 10γ dadurch, daß man die erste Stelle von $Z(m)$ wegläßt, also mit z_2 anfängt, und durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich für jeden positiven Exponenten k

$$Z(10^k m) = z_{k+1} z_{k+2} z_{k+3} \cdots.$$

Wenn aber

$$10^f \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, so ist nach 1.

$$Z(10^f m) = Z(m),$$

d. h. es ist

$$z_{f+1} = z_1, \quad z_{f+2} = z_2, \quad z_{f+3} = z_3, \cdots.$$

Die Ziffern der Mantisse wiederholen sich also von der $f + 1^{\text{ten}}$ Stelle an genau in derselben Reihenfolge wieder, wie von der ersten.

Die Ziffern zerfallen in Gruppen von je f, die wir so bezeichnen:

$$P(m) = z_1 z_2 \ldots z_f.$$

Diese Gruppe wiederholt sich in $Z(m)$ immer in derselben Reihenfolge und sie wird die Periode der Mantisse genannt. Man nennt daher auch die Mantisse $Z(m)$ und den Dezimalbruch, in den sich γ verwandeln läßt, periodisch, und die Zahl f bezeichnen wir als die Länge der Periode für den Nenner n. Wir haben also den Satz bewiesen:

Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner relativ prim zu 10 ist, läßt sich in einen periodischen Dezimalbruch verwandeln.

3. Um die übrigen Brüche gleich zu erledigen, bemerken wir, daß sich jeder Bruch β durch Multiplikation mit einer Potenz von 10, 10^k in einen solchen verwandeln läßt, der die Faktoren 2 und 5 nicht mehr im Nenner enthält und der also in einen periodischen Dezimalbruch verwandelbar ist. Um von $10^k\beta$ zu β zurückzukehren, hat man in diesem Dezimalbruch das Komma um k Stellen nach links zu verschieben. Dadurch treten vor die Stelle z_1, also vor den Beginn der ersten Periode, noch andere Ziffern, die die Periodizität stören. Die Periodizität beginnt dann erst nach der k^{ten} Stelle der Mantisse. Man nennt daher diese Dezimalbrüche unrein periodisch, während die, bei denen die Periode gleich hinter dem Komma einsetzt, rein periodisch heißen.

4. Wenn f der kleinste positive Exponent ist, der der Formel $10^f \equiv 1 \pmod n$ genügt, so kann die Periode der Mantisse $Z(m)$ nicht aus weniger als f Gliedern bestehen. Denn aus $Z(10^k m) = Z(m)$ folgt nach 1. $10^k m \equiv m$ oder, da m relativ prim zu n ist, $10^k \equiv 1$, und es ist also k nach § 68, 2. ein Vielfaches von f.

5. Da man einen Dezimalbruch mit 10 multipliziert, indem man das Komma um eine Stelle nach rechts rückt, so erhält man die folgenden Perioden:

$$\begin{aligned} P(m) &= z_1 z_2 z_3 \ldots z_f, \\ P(10m) &= z_2 z_3 z_4 \ldots z_1, \\ P(10^2 m) &= z_3 z_4 z_5 \ldots z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(10^{f-1} m) &= z_f z_1 z_2 \ldots z_{f-1}. \end{aligned}$$

Ist nun $\varphi(n) = ef$, so hat man für e verschiedene Werte von m solche Perioden zu bilden, um die Mantissen aller Brüche mit dem Nenner n zu erhalten. Ist $e = 1$, $f = \varphi(n)$, also 10 primitive Wurzel von n, so genügt ein einziger Wert, etwa $m = 1$, um nach diesen Formeln alle echten Brüche der Form m/n in Dezimalbrüche zu verwandeln. Für diese Werte von n braucht man also nur eine einzige Periode zu berechnen, die dann $\varphi(n)$ Glieder hat. Ist $e > 1$, so braucht man mehrere solche Perioden, die dafür um so kürzer sind.

6. Wir nehmen als erstes Beispiel $n = 7$. Wir dividieren in der gewöhnlichen Weise

$$
\begin{array}{l}
\underline{1}0 : 7 = 142857 \\
\;\;7 \\
\hline
\;\;\underline{3}0 \\
\;\;28 \\
\hline
\;\;\;\;\underline{2}0 \\
\;\;\;\;14 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\underline{6}0 \\
\;\;\;\;\;\;56 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{4}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;35 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{5}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;49 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1\,.
\end{array}
$$

Die Periode ist also hier 142857, und die unterstrichenen Zahlen sind die Reste der Potenzen von 10. Demnach erhält man

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{7} &= 0{,}142857 \cdots \\
\tfrac{3}{7} &= 0{,}428571 \cdots \\
\tfrac{2}{7} &= 0{,}285714 \cdots \\
\tfrac{6}{7} &= 0{,}857142 \cdots \\
\tfrac{4}{7} &= 0{,}571428 \cdots \\
\tfrac{5}{7} &= 0{,}714285 \cdots,
\end{aligned}
$$

und wo die Punkte stehen, wiederholen sich die voranstehenden Perioden. Hierdurch sind mit einem Schlag alle echten Brüche mit dem Nenner 7 bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit in Dezimalbrüche verwandelt.

7. Für $n = 13$ erhält man folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{l}
\underline{1}0 : 13 = 076923 \\
00 \\
\hline
\underline{10}0 \\
\;\;91 \\
\hline
\;\;\;\;\underline{9}0 \\
\;\;\;\;78 \\
\hline
\;\;\;\;\underline{12}0 \\
\;\;\;\;117 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{3}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;26 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{4}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;39 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1
\end{array}
$$

Die Periode hat also hier nur sechs Glieder, und man erhält die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{13} &= 0{,}076923 \cdots \\
\tfrac{10}{13} &= 0{,}769230 \cdots \\
\tfrac{9}{13} &= 0{,}692307 \cdots \\
\tfrac{12}{13} &= 0{,}923076 \cdots \\
\tfrac{3}{13} &= 0{,}230769 \cdots \\
\tfrac{4}{13} &= 0{,}307692 \cdots .
\end{aligned}$$

Um alle Brüche mit dem Nenner 13 zu erhalten braucht man eine zweite Periode, die man aus irgend einem der fehlenden Zähler ableiten kann. Nehmen wir 2/13, so ergibt sich:

```
20 : 13 = 153846
13
--
 70
 65
 --
  50
  39
  ---
  110
  104
  ---
    60
    52
    --
     80
     78
     --
      2.
```

Wir haben also

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{13} &= 0{,}153846 \cdots \\
\tfrac{7}{13} &= 0{,}538461 \cdots \\
\tfrac{5}{13} &= 0{,}384615 \cdots \\
\tfrac{11}{13} &= 0{,}846153 \cdots \\
\tfrac{6}{13} &= 0{,}461538 \cdots \\
\tfrac{8}{13} &= 0{,}615384 \cdots .
\end{aligned}$$

Damit sind auch die Brüche mit dem Nenner 13 erledigt. Hier liegt ein unbegrenztes Material zu Übungen vor, das durch den schönen, stets kontrollierbaren Erfolg einen großen Reiz hat.

8. Gauß hat diesen Gegenstand in den „Disquisitiones arithmeticae“, art. 313—318 eingehend behandelt. Er gibt dort eine Tabelle, die für alle Primzahlen und Primzahlpotenzen n unter 100 die Perioden vollständig enthält, und diese Tabelle ist, auf die Prim-

zahlen und Primzahlpotenzen unter 1000 fortgesetzt, aus Gauß' Nachlaß veröffentlicht. Gauß zeigt an der angeführten Stelle, wie man mit Hilfe dieser Tafeln die Entwicklungen der Brüche, deren Nenner mehrere verschiedene Primfaktoren enthalten, ableiten kann, auch für sehr große Nenner. Wir führen hier nur das eine Beispiel an:

$$\frac{22}{21} = \frac{1}{3} + \frac{5}{7}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333 \cdots$$
$$\frac{5}{7} = 0{,}7142857 \cdots$$
$$\frac{22}{21} = 1{,}0476190 \cdots.$$

Um die letzte Stelle der Periode richtig zu erhalten, muß man in den beiden Summanden noch um eine (unter Umständen auch um mehrere) Stellen über die Periode hinausgehen.

Zu erwähnen ist auch noch die Abhandlung von H. Bork über „periodische Dezimalbrüche" im Programm des Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin, 1895, die außer der Entwicklung der Hauptsätze über periodische Dezimalbrüche (nach Rechnungen von F. Keßler) eine Tafel enthält, in der zwar nicht die Periode selbst, aber die Länge der Perioden für alle Primzahlen unter 100000 angegeben ist.

9. Wenn $n = n'n''$, und n' relativ prim zu n'', und f', f'' die kleinsten positiven Exponenten sind, für die $10^{f'} - 1$ und $10^{f''} - 1$ durch n' und durch n'' teilbar sind, so ist $10^f - 1$ dann und nur dann durch n teilbar, wenn f zugleich ein Vielfaches von f' und f'' ist. Der kleinste Wert f ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f' und f'', und daraus ergibt sich der Satz:

Die Länge der Periode der Dezimalbrüche für einen zusammengesetzten Nenner n ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Periodenlänge für alle die Brüche, deren Nenner Teiler von n sind.

Ist 10 primitive Wurzel von n, so ist die Periodenlänge, wie wir gesehen haben, gleich $\varphi(n)$, und wir reichen mit einer Periode aus. Nach der Gaußschen Tabelle findet dies im ersten Hundert für die Zahlen

$$n = 7,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 49,\ 59,\ 61,\ 97$$

statt. Die Maximalzahl der verschiedenen Perioden ergibt sich für $n = 73$, nämlich $\varphi(n)/f = 9$, $f = 8$.

10. Da, wenn f die Periodenlänge für den Nenner n ist, $10^f - 1$ durch n teilbar sein muß, so hat man alle Nenner n, die eine gegebene Periodenlänge f haben, unter den Teilern von $10^f - 1$ zu suchen. Umgekehrt ist die Periodenlänge eines Bruches, dessen Nenner

ein Teiler von $10^f - 1$ ist, entweder gleich f oder gleich einem Teiler von f.

Es gibt also nur eine bestimmte Anzahl von Nennern solcher Brüche, die eine gegebene Periodenlänge f haben.

Beispielsweise kommen eingliedrige Perioden nur bei den Nennern $n = 3$, $n = 9$ vor:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}33 \cdots, \quad \tfrac{1}{9} = 0{,}111 \cdots.$$

Die Periodenlänge 2 kommt nur bei Brüchen vor, deren Nenner ein Teiler von 99 ist, also bei $n = 11, 33, 99$, die Periodenlänge 3 bei Brüchen, deren Nenner Teiler von $999 = 27 \cdot 37$ sind, u. s. f. Bei größeren Periodenlängen bietet die Zerlegung von $10^f - 1$ in seine Primfaktoren Schwierigkeiten, zu deren Überwindung, wenn man die Zerlegung nicht aus den vorhandenen Tafeln entnehmen will oder kann, besondere Kunstgriffe angewendet werden müssen. Es ist z. B., wie sich durch Ausmultiplizieren leicht bestätigen läßt:

$$\begin{aligned} 10^4 - 1 &= 9 \cdot 11 \cdot 101, \\ 10^5 - 1 &= 9 \cdot 11 \cdot 271, \\ 10^6 - 1 &= 27 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \\ 10^7 - 1 &= 9 \cdot 239 \cdot 4649, \\ 10^8 - 1 &= 9 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137. \end{aligned}$$

Alle die hier vorkommenden Faktoren als Nenner ergeben verhältnismäßig kurze Perioden.

11. Wir schließen die Betrachtungen über periodische Dezimalbrüche mit den folgenden Sätzen:

Es sei

$$m = z_1 z_2 z_3 \cdots z_f$$

eine beliebige positive ganze Zahl, die mit den Ziffern $z_1, z_2, \cdots z_f$ geschrieben wird, und es sei

$$n = 10^f - 1,$$

die mit f Neunern geschriebene ganze Zahl. Es ist dann, dekadisch geschrieben

$$10m = z_1 z_2 \cdots z_f 0,$$

und

$$z_1 n = z_1 00 \cdots 0 - z_1,$$

wo rechts f Nullen hinter z_1 stehen.

Demnach ist

$$10m = z_1 n + m_1,$$

worin m_1 wieder eine f-stellige Zahl ist, nämlich

$$m_1 = z_2 z_3 \cdots z_f z_1.$$

Es ist dann ebenso

$$10 m_1 = z_2 n + m_2,$$

$$m_2 = z_3 z_4 \cdots z_f z_1 z_2,$$

und so kann man fortfahren, und erhält die Umwandlung des gemeinen Bruches m/n in einen Dezimalbruch, der nun, wie man sieht, die Periode $z_1 z_2 \ldots z_f$ hat. Diese kann auch in kürzere Perioden zerfallen, deren Länge dann ein Teiler von f ist. Der gemeine echte Bruch m/n kann sich natürlich auch noch kürzen lassen, und er kann sich auf 1 reduzieren, wenn $m = n$ ist, die Zahl m also aus lauter Neunern besteht. Damit ist dann bewiesen:

Jeder periodische Dezimalbruch ist die Umwandlung eines gemeinen Bruches. Der Dezimalbruch, dessen Periode eingliedrig und gleich 9 ist, entsteht aus der Umwandlung des uneigentlichen Bruches 1.

§ 70. Diophantische Gleichungen.

1. Bei der Auflösung der Diophantischen oder unbestimmten Gleichungen handelt es sich um die Ermittelung unbekannter ganzer Zahlen, von denen gewisse Eigenschaften verlangt werden, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen[1]). Die einfachste Aufgabe dieser Art ist die folgende:

Es sind a, b, c gegebene ganze Zahlen. Es werden zwei andere ganze Zahlen x, y gesucht, die der Gleichung genügen:

$$ay - bx = c. \tag{1}$$

Zunächst machen wir einige allgemeine Bemerkungen.

Die Gleichung (1) bleibt ungeändert, wenn wir gleichzeitig a in $-a$ und y in $-y$ verwandeln. Ebenso wenn wir gleichzeitig b in $-b$ und x in $-x$ oder c in $-c$, x in $-x$, y in $-y$ verwandeln. Daher beschränken wir die Allgemeinheit nicht, wenn wir annehmen a, b und c seien positiv. Wäre eine dieser Zahlen, etwa b gleich Null, so käme die Aufgabe auf die Division von c durch a zurück. Wir schließen also diesen Fall aus.

1) Über die Person des Diophantus von Alexandria ist so gut wie nichts bekannt. Selbst in Betreff seiner Lebenszeit steht nur fest, daß er zwischen 180 v. Chr. und 370 n. Chr. gelebt haben muß. Sein Werk über Arithmetik (ἀριθμητικά) ist nicht vollständig auf uns gekommen. Die neueste Textausgabe ist von P. Tannery (Leipzig, B. G. Teubner 1893, griechisch und lateinisch), eine deutsche Übersetzung von Wertheim (Leipzig, B. G. Teubner 1890). Vgl. über Diophant: Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. I, S. 433 f.

2. Wenn die beiden Zahlen a, b einen gemeinschaftlichen Teiler d haben, so kann die Aufgabe 1. gewiß nur dann Lösungen haben, wenn auch c durch d teilbar ist. Dann aber können wir in der Gleichung (1) alle Glieder durch d teilen. Diese Operation denken wir uns ausgeführt, was auf die Annahme hinauskommt, die wir jetzt machen wollen, daß a und b teilerfremde Zahlen seien.

Daß unter dieser Voraussetzung die Aufgabe 1. immer eine Lösung hat, folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Wir haben nämlich in § 67, 9. gesehen, daß der Ausdruck

$$z = ay - bx$$

ein volles Restsystem für den Modul ab durchläuft, wenn x und y volle Restsysteme für die Moduln a und b durchlaufen. Es muß darunter also auch eine Zahl vorkommen, die nach ab denselben Rest gibt wie c, die also gleich $c + kab$ gesetzt werden kann, wenn k eine ganze Zahl ist. Demnach gibt es drei ganze Zahlen x, y, k, die der Gleichung

$$ay - bx = c + kab,$$

oder

$$a(y - kb) - bx = c$$

genügen. Hiernach ist aber auch die Gleichung (1) befriedigt, wenn dort $x, y - kb$ für x und y gesetzt wird.

3. Wir nehmen an, es sei eine Lösung x_0, y_0 der Gleichung (1) gefunden, also

$$ay_0 - bx_0 = c. \tag{2}$$

Aus dieser einen lassen sich dann alle übrigen leicht finden. Ziehen wir nämlich die Gleichung (2) von der Gleichung (1) ab, so folgt

$$a(y - y_0) = b(x - x_0). \tag{3}$$

Es muß also das Produkt $b(x - x_0)$ durch a teilbar sein, und da a und b schon als teilerfremd angenommen sind, so muß $x - x_0$ durch a teilbar sein. Wir bezeichnen den Quotienten, der eine ganze Zahl ist, mit λ, setzen also $x - x_0 = \lambda a$. Wenn man diesen Wert für $x - x_0$ in (3) einsetzt und durch a dividiert, so folgt $y - y_0 = \lambda b$, also:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a, \\ y &= y_0 + \lambda b. \end{aligned} \tag{4}$$

Umgekehrt ergibt sich aus (4), was auch λ sein mag:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0,$$

und wenn also x_0, y_0 der Gleichung (2) genügen, so genügen x, y der Gleichung (1). Wenn also die Gleichung (1) überhaupt eine Lösung

hat, so hat sie auch unendlich viele, die alle durch die Formeln (4) aus einer abgeleitet werden können.

4. Endlich können wir noch eine weitere Vereinfachung vornehmen, wodurch die allgemeine Aufgabe 1. auf einen speziellen Fall zurückgeführt wird.

Genügen x_0, y_0 der Gleichung

$$ay_0 - bx_0 = 1,$$

so geben die beiden Zahlen

$$x = cx_0, \quad y = cy_0$$

eine Lösung der Gleichung (1), wie man sofort erkennt, wenn man die beiden Seiten der Gleichung (5) mit c multipliziert.

Hierdurch ist die Aufgabe 1. auf die folgende einfachere zurückgeführt:

5. Es seien a, b zwei positive ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler; es wird irgend ein Paar ganzer Zahlen x, y gesucht, das der Gleichung

$$ay - bx = 1 \tag{5}$$

genügt.

Aus einer Lösung dieser Gleichung erhält man alle andern nach den Formeln (4). Man kann also immer positive Lösungen finden.

6. Ist $a = 1$, so kann man x ganz beliebig annehmen, und erhält $y = bx + 1$, und ebenso, wenn $b = 1$ ist, $x = ay - 1$; sind aber a und b größer als 1, so kann man in (4) für λ den Quotienten, für x_0 den Rest der Division von x durch a nehmen, sodaß

$$0 < x_0 < a$$

wird. Dann aber ist

$$0 < ay_0 = 1 + bx_0 < ab + 1,$$

also, da y_0 nicht gleich b sein kann, weil sonst 1 durch b teilbar sein müßte,

$$0 < y_0 < b.$$

Es gibt also eine und nur eine Lösung der Aufgabe 5., in der x und y positiv und kleiner als a und b sind, und diese Lösung nennen wir die kleinste positive Lösung.

7. Zur wirklichen Auffindung der Lösungen einer Diophantischen Gleichung gibt es nun ein sicheres und verhältnismäßig leicht zu handhabendes Mittel, das sich auf den Euklidischen Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers stützt (§ 15).

Es seien also in der vorgelegten Gleichung a, b gegebene positive

ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, die beide größer als 1 sind, und wir wollen annehmen, es sei a größer als b. Wäre es anders, so brauchte man ja nur a mit b und zugleich x, y mit $-y$, $-x$ zu vertauschen. Wir setzen der besseren Bezeichnung wegen

$$b = a_1$$

und bilden nun den Algorithmus § 15, (1), der, weil a und a_1 relativ prim sind, mit $a_n = 1$ abschließen muß:

$$(6) \qquad \begin{aligned} a &= q a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1, \\ a_{n-1} &= q_{n-1}. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir, wenn wir wieder b für a_1 setzen:

$$a_2 = a - bq,$$

und wenn wir diesen Wert für a_2 in die zweite Gleichung einsetzen:

$$-a_3 = a q_1 - b(q q_1 + 1),$$

und wenn man so fortfährt, sieht man, daß sich jede der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ linear durch a und b ausdrücken läßt.

8. Wir wollen annehmen, es sei für irgend ein a_ν die Formel gefunden:

$$(7) \qquad (-1)^\nu a_\nu = a Q_{\nu-1} - b P_{\nu-1}.$$

Die Vergleichung dieser Formel für $\nu = 2$, $\nu = 3$ mit den ersten Fällen für a_2, a_3 gibt:

$$(8) \qquad \begin{aligned} Q_1 &= 1, \quad P_1 = q, \\ Q_2 &= q_1, \quad P_2 = q q_1 + 1. \end{aligned}$$

Setzt man aber in der Gleichung

$$a_\nu = q_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+2}$$

für a_ν den Ausdruck (7) und für $a_{\nu+1}$ den entsprechenden:

$$(9) \qquad (-1)^{\nu+1} a_{\nu+1} = a Q_\nu - b P_\nu$$

ein, so folgt:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a(Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}) - b(P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}).$$

Wenn also die Formeln (7) und (9) gelten, so gilt auch

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a Q_{\nu+1} - b P_{\nu+1},$$

wenn

$$(10) \qquad \begin{aligned} P_{\nu+1} &= P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}, \\ Q_{\nu+1} &= Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1} \end{aligned}$$

gesetzt wird, und durch die Formeln (10) kann man die Zahlen P_ν und Q_ν leicht rekurrent berechnen.

Man erhält z. B.:

$$P_3 = q q_1 q_2 + q_2 + q, \quad Q_3 = q_1 q_2 + 1,$$
$$P_4 = q q_1 q_2 q_3 + q q_3 + q_2 q_3 + q q_1 + 1,$$
$$Q_4 = q_1 q_2 q_3 \ \ + q_3 \ \ + q_1,$$

u. s. f., und zur Berechnung der Zahlen P, Q braucht man also nur die Quotienten $q, q_1, q_2, \ldots$ zu kennen. Man sieht überdies, daß diese Zahlen P, Q alle positiv sind und daß

$$(11) \qquad P_{\nu+1} > P_\nu, \quad Q_{\nu+1} > Q_\nu$$

ist (nur wenn $q_1 = 1$ ist, ist $Q_2 = Q_1$).

9. Wendet man die Gleichung (7) auf $\nu = n$ an und bedenkt, daß $a_n = 1$ ist, so ergibt sich

$$(12) \qquad a Q_{n-1} - b P_{n-1} = (-1)^n,$$

und man hat also eine Lösung der Aufgabe 5.:

$$ay - bx = 1,$$

wenn man

$$(13) \qquad \begin{aligned} x &= (-1)^n P_{n-1}, \\ y &= (-1)^n Q_{n-1} \end{aligned}$$

setzt.

Wenn wir die erste der Gleichungen (10) mit Q_ν, die zweite mit P_ν multiplizieren und dann beide voneinander abziehen, und beide Seiten noch mit $(-1)^{\nu+1}$ multiplizieren, so ergibt sich

$$(-1)^{\nu+1}(P_{\nu+1} Q_\nu - Q_{\nu+1} P_\nu) = (-1)^\nu (P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1}).$$

Es hat also der Ausdruck

$$(-1)^\nu (P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1})$$

für alle Werte von ν denselben Wert, und wenn man darin $\nu = 2$ nimmt, so folgt aus (8):

$$(14) \qquad P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1} = (-1)^\nu.$$

Diese Formel zeigt, daß die Zahlen P_ν, Q_ν für jedes ν ohne gemeinsamen Teiler sind, denn ein solcher gemeinsamer Teiler müßte ja Teiler von ± 1 sein.

10. Wendet man die Formel (9) auf $\nu = n$ an und bedenkt, daß $a_{n+1} = 0$ ist, so folgt

$$a Q_n = b P_n.$$

Da nun aber sowohl a und b als P_n und Q_n relativ prim und positiv sind, so folgt hieraus

$$P_n = a, \quad Q_n = b,$$

und aus den Ungleichungen (11) folgt:

$$P_{n-1} < a, \quad Q_{n-1} < b.$$

Man sieht also hieraus, daß uns die Formeln (13) bei geradem n die kleinste positive Lösung der Gleichung (5) ergeben. Bei ungeradem n erhält man durch

$$x = a - P_{n-1}, \quad y = b - Q_{n-1}$$

die kleinste positive Lösung.

11. Wir greifen ein ganz beliebiges Zahlenbeispiel heraus, indem wir

$$a = 1000, \quad b = 221$$

setzen. Wir bilden den Algorithmus (6):

$$\begin{aligned}
1000 &= 4 \cdot 221 + 116, \\
221 &= 1 \cdot 116 + 105, \\
116 &= 1 \cdot 105 + 11, \\
105 &= 9 \cdot 11 \;\; + 6, \\
11 &= 1 \cdot 6 \;\;\; + 5, \\
6 &= 1 \cdot 5 \;\;\; + 1, \\
5 &= 5 \cdot 1,
\end{aligned}$$

und finden $n = 7$. Für die q erhalten wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
&q,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6 \\
&= 4,\ 1,\ 1,\ 9,\ 1,\ 1,\ 5,
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 4, & Q_1 &= 1, \\
P_2 &= 5, & Q_2 &= 1, \\
P_3 &= 9, & Q_3 &= 2, \\
P_4 &= 86, & Q_4 &= 19, \\
P_5 &= 95, & Q_5 &= 21, \\
P_6 &= 181, & Q_6 &= 40, \\
P_7 &= 1000, & Q_7 &= 221.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$x = 1000 - 181 = 819, \quad y = 221 - 40 = 181$$

die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$1000\, y - 221\, x = 1.$$

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

§ 71. Der Satz von Wilson.

1. Man kann der Aufgabe, die wir in § 70 behandelt haben, eine andere Einkleidung geben. Die Gleichung:

$$ay - bx = c$$

besagt nämlich, daß $ay - c$ durch b teilbar ist, daß also (§ 67)

$$ay \equiv c \pmod{b},$$

und wenn daher a und b relative Primzahlen sind, so gibt uns unsere Betrachtung immer eine Lösung y dieser Kongruenz. Ist aber eine Lösung y_0 dieser Kongruenz bekannt, so gibt uns die Formel (4) § 70 alle übrigen in der Form $y = y_0 + \lambda b$. Man kann dann λ so bestimmen, daß y positiv und kleiner als b wird.

Wir sprechen diesen Satz so aus:

Sind a und b relative Primzahlen, so hat die Kongruenz

$$ay \equiv c \pmod{b}$$

eine und nur eine Lösung y aus der Reihe der Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots b - 1.$$

2. Nehmen wir den Modul als ungerade Primzahl an und bezeichnen ihn dementsprechend mit p, so folgt aus dem Satze als spezieller Fall:

Ist a eine durch p nicht teilbare Zahl, so gibt es immer eine Zahl a' aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots p - 1$, die der Kongruenz

$$aa' \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt.

Diese Zahl a' ist dann und nur dann gleich a, wenn $a \equiv 1$ oder $a \equiv -1$ (oder, was dasselbe ist, $\equiv p - 1$) (mod. p) ist. Denn setzen wir $a' = a$, so ist $aa' - 1 = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ nur dann durch p teilbar, wenn entweder $a - 1$ oder $a + 1$ durch p teilbar ist.

Die Zahlen $2, 3, \cdots p-2$ zerfallen daher in $\frac{1}{2}(p-3)$ Paare von Zahlen a, a', deren Produkt mit 1 kongruent ist, und das Produkt der beiden übrigen, $1(p-1)$ ist mit -1 kongruent. Folglich ist das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

was auch für $p = 2$ richtig ist, weil $+1 \equiv -1 \pmod{2}$ ist. In Worten ausgedrückt:

Ist p eine Primzahl, so ist die Zahl $(p-1)! + 1$ durch p teilbar.

3. Dieser wichtige Lehrsatz wird der Wilsonsche[1]) genannt. Er läßt sich in der folgenden Weise umkehren:

Ist p eine natürliche Zahl, und $(p-1)! + 1$ durch p teilbar, so ist p eine Primzahl.

Denn enthält p einen Primteiler q, der kleiner ist als p, so ist $(p-1)!$ durch q teilbar, und $(p-1)! + 1$ kann nicht durch q, also auch nicht durch p teilbar sein. Der Wilsonsche Satz gibt uns also ein sicheres Kennzeichen für eine Primzahl.

4. Von dem Wilsonschen Satz machen wir folgende wichtige Anwendung:

Ist p wieder eine ungerade Primzahl, so gibt es zu jeder Zahl a der Reihe $1, 2, \cdots (p-1)$ eine Zahl a'', die der Kongruenz

$$aa'' \equiv -1 \pmod{p}$$

genügt. Wenn nun die Kongruenz

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$

keine Lösung hat, so ist niemals $a'' = a$, und die Zahlen $1, 2, 3, \cdots p-1$ zerfallen in $\frac{1}{2}(p-1)$ Paare, deren Produkt nach dem Modul p mit -1 kongruent ist. Daher ist

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

und nach dem Wilsonschen Satze auch $\equiv -1$. Folglich ist, da $+1$ nicht mit -1 kongruent sein kann, $\frac{1}{2}(p-1)$ eine ungerade Zahl.

---

1) Die erste Erwähnung dieses Satzes findet sich in Warings Meditationes algebraicae, deren erste Auflage 1770 erschien. „Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Iohannes Wilson Armiger." Dieser Ioannes Wilson Armiger ist ohne Zweifel identisch mit Sir John Wilson, der 1741—1793 lebte, von dem es in der „National Biography", LXII, 107 (London 1900) heißt: „While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on Edward Warings Miscellanea analytica by William Samuel Powell" (briefliche Mitteilung von M. Cantor).

5. Ist aber die Kongruenz (1) lösbar, und ist $x = \alpha$ eine Lösung, so ist für jede Lösung von (1) $x^2 \equiv \alpha^2$, also $(x - \alpha)(x + \alpha)$ durch p teilbar, also $x \equiv + \alpha$ oder $x \equiv - \alpha$. Es gibt also zwei und nur zwei Lösungen aus der Reihe $1, 2, \cdots p - 1$, deren Produkt $\alpha(p - \alpha) \equiv - \alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ist. Die Zahlen $1, 2, \ldots p - 1$ zerfallen also jetzt in $\frac{1}{2}(p - 3)$ Paare, a, a'', deren Produkt mit -1 kongruent ist, und es bleiben zwei Zahlen $\alpha, p - \alpha$ übrig, deren Produkt $\equiv 1$ ist. Demnach ist mit Rücksicht auf den Wilsonschen Satz

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1,$$

und es muß also $\frac{1}{2}(p - 1)$ eine gerade Zahl sein.

Alle ungeraden Zahlen p (ob Primzahl oder nicht) zerfallen in zwei Klassen, je nachdem $\frac{1}{2}(p - 1)$ gerade oder ungerade ist. Die ersten können in die Form $4n + 1$, die zweiten in die Form $4n + 3$ oder $4n - 1$ gesetzt werden, worin n eine ganze Zahl bedeutet.

Für die Primzahlen, die zu der ersten Klasse gehören, ist die Kongruenz (1) lösbar, für die Primzahlen der zweiten Klasse nicht. Wir drücken diesen von Euler zuerst bewiesenen Satz so aus:

6. Ist p eine Primzahl von der Form $4n + 1$, so kann man für x eine solche ganze Zahl setzen, daß $x^2 + 1$ durch p teilbar wird; ist aber p von der Form $4n + 3$, so ist das nicht möglich.

Zu den Primzahlen der ersten Klasse gehören z. B.

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73,

zu denen der zweiten Klasse

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67.

7. Für die Primzahlen der ersten Klasse kann man die Lösung der Kongruenz (1) leicht aus dem Wilsonschen Satze finden.

Denn es ist:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv -(p-1), \\ 2 &\equiv -(p-2), \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad \pmod{p} \\ \frac{p-1}{2} &\equiv -\left(p - \frac{p-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ist also $p = 4n + 1$, so zerfallen die Zahlen des Produktes $(p - 1)!$ in zwei Hälften: $1, 2, \ldots 2n$ und $(2n + 1), (2n + 2), \cdots (p - 1)$ in der Art, daß das Produkt der ersten Hälfte mit dem Produkt der zweiten Hälfte nach dem Modul p kongruent ist. Daher ist nach dem Wilsonschen Satze:

$$(p-1)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

und die Lösung der Kongruenz (1) wird in der Form erhalten

$$x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Ist z. B. $p = 13$, so ist $x \equiv 6! \equiv 720 \equiv 5 \pmod{13}$, und in der Tat ist $5^2 + 1 = 26$ durch 13 teilbar.

Bei großen Werten von p läßt sich freilich diese Methode zur Berechnung von x praktisch nicht anwenden. Für solche Zahlen hat Gauß ein auf der höheren Arithmetik beruhendes Hilfsmittel zur schnellen Berechnung angegeben, das wir hier zwar nicht in seiner Allgemeinheit entwickeln können, das wir aber doch an einem Beispiel soweit klar machen können, daß es danach auf beliebige ähnliche Beispiele angewandt werden kann. Dazu aber sind die folgenden einleitenden Betrachtungen erforderlich.

§ 72. Quadratische Reste.

1. Ist m eine beliebige natürliche Zahl, und x einer der Reste $0, 1, 2, 3, \ldots m-1$ von m, so geben die beiden Zahlen

$$x^2, \quad (m-x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$$

bei der Division mit m dieselben Reste, und andere Reste als diese können bei der Division von Quadratzahlen durch m nicht zum Vorschein kommen. Man erhält daher gewiß alle diese Reste aus der Division von x^2 durch m, und braucht dabei x nicht größer als $\frac{1}{2}m$ anzunehmen.

Die so entstandenen Reste heißen die quadratischen Reste von m. Ihre Anzahl ist höchstens gleich $(\frac{1}{2}m + 1)$.

Die übrigen Reste von m, die niemals Reste von Quadratzahlen sein können, heißen die quadratischen Nichtreste. Ihre Anzahl ist mindestens gleich $(\frac{1}{2}m - 1)$.

2. Beispiele: $m = 3$:

Quadratische Reste: 0, 1,
„ Nichtreste: 2.

$m = 4$:

„ Reste: 0, 1,
„ Nichtreste: 2, 3.

$m = 5$:

Quadratische Reste: 0, 1, 4,
„ Nichtreste: 2, 3.

$m = 6$:

„ Reste: 0, 1, 3, 4,
„ Nichtreste: 2, 5.

$m = 7$:

„ Reste: 0, 1, 2, 4,
„ Nichtreste: 3, 5, 6.

$m = 8$:

„ Reste: 0, 1, 4,
„ Nichtreste: 2, 3, 5, 6.

$m = 9$:

„ Reste: 0, 1, 4, 7,
„ Nichtreste: 2, 3, 5, 6, 8.

$m = 11$:

„ Reste: 0, 1, 3, 4, 5, 9,
„ Nichtreste: 2, 6, 7, 8, 10.

3. Wir heben den speziellen Satz hervor, der aus dem Beispiel $m = 8$ folgt, daß das Quadrat einer ungeraden Zahl immer von der Form $8n + 1$ (also auch von der Form $4n + 1$) ist.

4. Wenn nun $x^2 + 1$ durch eine Primzahl p teilbar sein soll, so setzen wir

$$x^2 + 1 = py, \tag{1}$$

worin also x und y noch unbekannte ganze Zahlen sind. Statt direkt x zu suchen, kann man aber auch y suchen, und diese Zahl hat die Bedingung zu erfüllen, daß $py - 1$ eine Quadratzahl sein soll.

Da man $x < \frac{1}{2} p$ annehmen kann, so folgt aus (1) $py < \frac{1}{4} p^2$ oder $y < \frac{1}{4} p$. Man hat also nur noch den vierten Teil aller Zahlen $1, 2, \cdots p - 1$ für y zu setzen und zu versuchen, ob $py - 1$ ein Quadrat werde. Um aber festzustellen, ob eine Zahl ein Quadrat ist, dazu hat man ein einfaches und sicheres Mittel (§ 21).

5. Es läßt sich aber die Anzahl der Zahlen, die man für y versuchsweise zu setzen hat, noch weiter herabdrücken. Zu diesem Zweck

nehme man eine beliebige Zahl e an, die man den Exkludenten nennt (man wählt dazu zunächst kleine Zahlen, 3, 4, 5, 7, 8, ... u. s. w.). Die Zahl 6 als Exkludenten zu nehmen, ist zwecklos, da sie nichts anderes gibt als der Exkludent 3. Ist nun β ein quadratischer Nichtrest von e, so kann nach (1) niemals

$$py \equiv \beta + 1 \pmod{e} \tag{2}$$

werden, und man hat also alle Zahlen y auszuschließen, die einer Kongruenz (2) genügen.

6. Wählen wir als Beispiel $p = 97$, so haben wir zunächst für y die Zahlen 1, 2, ... 24 zu setzen.

Nehmen wir $e = 3$ als Exkludenten, so ist 2 Nichtrest, und wenn wir also in (2) $\beta = 2$ setzen, so folgt, daß alle durch 3 teilbaren Zahlen davon noch auszuschließen sind, und es bleiben also die Zahlen

$$y = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20,\ 22,\ 23.$$

Nimmt man $e = 8$, $\beta = 2, 3, 5, 6$, so ergeben sich als noch auszuschließen alle Zahlen, die von einer der Formen

$$8n + 3, \quad 8n + 4, \quad 8n + 6, \quad 8n + 7$$

sind, und es bleiben also

$$y = 1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 16,\ 17.$$

Setzt man ferner $e = 5$, $\beta = 2, 3$, so hat man die Lösungen der Kongruenz

$$2y \equiv 3,\ 4, \text{ d. h. } y \equiv 4,\ 2 \pmod{5}$$

auszuschließen, also die Zahlen 2 und 17.

Wendet man noch die Zahlen $e = 9$, $e = 7$ an, so kann man alle Zahlen bis auf 5 und 13 ausschließen, und man findet dann

$$97 \cdot 5 - 1 = 484 = 22^2.$$

Es genügt also $x \equiv 22$, oder $\equiv 75$ der Kongruenz $x^2 \equiv 1 \pmod{97}$. Dieses Verfahren kann man, freilich mit mehr Rechnung, auch auf größere Primzahlen anwenden, wenn man mit den Exklusionen noch weiter geht, und findet so z. B. für $p = 1901$ den Wert $y = 25$, und daraus das nachträglich leicht zu verifizierende Resultat

$$218^2 \equiv -1 \pmod{1901}.$$

Wir geben noch einige Beispiele, die aus einer von Euler berechneten Tabelle willkürlich herausgegriffen sind[1])

1) Commentationes arithmeticae, Bd. 1, S. 362.

$$114^2 \equiv -1 \pmod{317}, \quad 78^2 \equiv -1 \pmod{1217};$$
$$208^2 \equiv -1 \pmod{509}, \quad 51^2 \equiv -1 \pmod{1301};$$
$$26^2 \equiv -1 \pmod{677}, \quad 225^2 \equiv -1 \pmod{1489};$$
$$317^2 \equiv -1 \pmod{773}, \quad 61^2 \equiv -1 \pmod{1861};$$
$$469^2 \equiv -1 \pmod{1009}, \quad 412^2 \equiv -1 \pmod{1997}.$$

§ 73. Die Pythagoräischen Dreiecke.

1. Es ist eine uralte Wahrnehmung, deren Geschichte sich im Dunkel der Vorzeit verliert, daß ein Dreieck, dessen Seiten, in irgend einer Längeneinheit gemessen, 3, 4 und 5 sind, einen rechten Winkel hat; und diese drei Zahlen sind durch die arithmetische Eigenschaft ausgezeichnet, daß das Quadrat der größten unter ihnen gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen ist ($5^2 = 3^2 + 4^2$). Diese Tatsachen sind ein Ausdruck des Pythagoräischen Lehrsatzes, und die Historiker sind der Meinung, daß diese arithmetische Wahrnehmung das Ursprüngliche, die Quelle für den geometrischen Satz gewesen sei. (Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. 1. S. 168.)

Man nennt ein rechtwinkeliges Dreieck ein Pythagoräisches, wenn sich seine Seiten, in irgend einer Einheit gemessen, in ganzen Zahlen ausdrücken lassen, und um alle Pythagoräischen Dreiecke zu finden, hat man also die arithmetische Aufgabe zu lösen, alle natürlichen Zahlen x, y, z zu finden, die der Bedingung

$$(1) \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

genügen.

2. Um diese Aufgabe zu lösen, machen wir zunächst die Bemerkung, daß wir aus jeder Lösung von (1) beliebig viele andere ableiten können, wenn wir die drei Zahlen x, y, z mit einem und demselben Faktor multiplizieren. Ebenso können wir, wenn x, y, z den größten gemeinsamen Teiler h haben, die Gleichung (1) durch h^2 dividieren, und erhalten daraus eine Lösung, in der x, y, z keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Hiernach können wir uns auf die Annahme beschränken, daß x, y, z keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann können aber auch nicht zwei von diesen drei Zahlen einen gemeinsamen Teiler haben; denn sind zwei von diesen Zahlen durch irgend eine Primzahl q teilbar, so muß wegen (1) auch die dritte durch q teilbar sein.

Demnach dürfen keine zwei der Zahlen x, y, z einen gemeinsamen Teiler haben.

Es können also auch nicht zwei dieser Zahlen gerade sein.

Andererseits können die Zahlen x, y nicht beide ungerade sein. Denn ist $x = 2h + 1$, $y = 2k + 1$, so ist

$$x^2 + y^2 = 4(h^2 + k^2) + 4(h + k) + 2,$$

und diese Zahl ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Sie kann also keine Quadratzahl sein, da jede gerade Quadratzahl durch 4 teilbar sein muß. Wir beeinträchtigen daher die Allgemeinheit nicht, wenn wir x ungerade, y gerade und z ungerade annehmen. Dann schreiben wir die Gleichung (1) in die Form:

$$(2) \qquad x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Setzen wir:

$$z + y = m,$$
$$z - y = n,$$

so sind nach unserer Voraussetzung m und n ungerade Zahlen und es folgt

$$z = \frac{m + n}{2}, \quad y = \frac{m - n}{2},$$

woraus noch zu schließen ist, daß $m > n$ ist, und daß m und n keinen gemeinsamen Faktor haben können, da dieser nur ungerade sein könnte, und daher auch in y und z enthalten wäre. Nun folgt aus (2)

$$(3) \qquad x^2 = mn,$$

und daraus ergibt sich, daß m und n Quadratzahlen sein müssen.

Denn wenn m irgend einen Primfaktor in einer ungeraden Potenz enthielte, so müßte dieser wenigstens noch einmal in n enthalten sein, was der Annahme widerspricht, daß m und n relativ prim seien.

Es ist daher $m = a^2$, $n = b^2$, $x = ab$, wenn a, b ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und folglich:

$$(4) \qquad x = ab, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

3. Umgekehrt genügen, wenn a, b irgend zwei ungerade ganze Zahlen sind, a die größere von beiden, diese Ausdrücke der Gleichung (1). Denn es ist

$$a^2 b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2.$$

Demnach sind durch die Formeln (4) alle möglichen Pythagoräischen Dreiecke dargestellt. Man erhält beispielsweise

$$a = 3, \quad b = 1, \quad x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5,$$
$$a = 5, \quad b = 1, \quad x = 5, \quad y = 12, \quad z = 13,$$
$$a = 5, \quad b = 3, \quad x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17,$$

u. s. f.

§ 74. Der große Fermatsche Satz.

1. Die Verallgemeinerung der im vorigen Paragraphen gelösten Aufgabe würde die sein, solche positive ganze Zahlen x, y, z zu finden, die der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen. Fermat hat ohne Beweis den Satz ausgesprochen, daß es solche Zahlen nicht gibt, wenn $n > 2$ ist. Es ist aber bis auf den heutigen Tag nicht gelungen, diesen Satz, der den Namen des großen Fermatschen Satzes führt, und an dessen Richtigkeit nicht gezweifelt wird, allgemein zu beweisen. Euler hat den Beweis für die beiden Werte der Exponenten $n = 3$ und $n = 4$ gegeben; für $n = 5$ ist er von Dirichlet bewiesen, und Kummer hat durch die Hilfsmittel der höheren Zahlentheorie einen Beweis gegeben, der nur noch einzelne besondere Werte von n ausschließt, die, wenigstens unter den kleineren Werten von n, selten sind. Der Beweis für den Fall $n = 4$ läßt sich mit ganz elementaren Hilfsmitteln führen und soll hier mitgeteilt werden.

2. Angenommen, die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

habe eine Lösung in ganzen Zahlen x, y, z, von denen keine verschwindet, so hat auch die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{2}$$

eine solche Lösung. Man hat ja nur das z der Gleichung (2) gleich dem Quadrate des z der Gleichung (1) zu setzen.

Es genügt also, oder gibt sogar noch mehr als wir verlangen, wenn wir die Unmöglichkeit von (2) beweisen. Hat aber die Gleichung (2) überhaupt Lösungen, so wird unter diesen auch eine (vielleicht mehrere) sein, in der z^2 so klein als möglich ist. In dieser Lösung, die wir nun unter x, y, z verstehen, können x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Denn wäre d ein gemeinsamer Teiler von x, y, so müßte z durch d^2 teilbar sein, und durch Division der ganzen Gleichung (2) durch d^4 erhält man eine Gleichung derselben Form, in der z verkleinert ist.

3. Wenn nun (2) erfüllt ist, so sind x^2, y^2, z die Seiten eines Pythagoräischen Dreiecks, und wir können nach § 73, 2. setzen.

$$x^2 = ab, \quad y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}, \tag{3}$$

worin a und b ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind ($a > b$). Aus der ersten der Gleichungen (3) schließen wir aber ebenso wie in

§ 73, 2. aus der Gleichung (3), daß die Zahlen a, b selbst Quadrate sein müssen, und setzen

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2,$$

worin α, β wieder ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind.

Setzen wir nun

$$\alpha + \beta = 2t, \quad \alpha - \beta = 2u$$

und folglich

$$\alpha = t + u, \quad \beta = t - u,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4tu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2(t^2 + u^2),$$

so sind auch t und u ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und es folgt aus (3):

$$y^2 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} = 4tu(t^2 + u^2)$$

und daraus

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = tu(t^2 + u^2). \tag{4}$$

Nun sind t und u ohne gemeinsamen Teiler, und folglich kann auch $t^2 + u^2$ weder mit t noch mit u einen Teiler gemein haben, und daraus schließen wir, wie oben, daß die drei Zahlen t, u, $t^2 + u^2$ Quadratzahlen sind. Setzen wir

$$t = x_1^2, \quad u = y_1^2, \quad t^2 + u^2 = z_1^2,$$

so folgt:

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2. \tag{5}$$

Nun ist aber

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{y^2}{a - b},$$

also, da $a - b$ eine positive ganze Zahl, also mindestens gleich 1 ist,

$$z_1^2 \leqq y^2;$$

andererseits ist $y^4 = z^2 - x^4 < z^2$ und folglich

$$z_1^2 < z;$$

es wäre also z_1^2 kleiner als z und umsomehr kleiner als z^2, was der Annahme widerspricht, daß z^2 die kleinste Zahl sei, für die die Gleichung (2) befriedigt werden kann. Es gibt folglich überhaupt keine positiven ganzen Zahlen x, y, z, die der Gleichung (2) genügen, wie der Fermatsche Satz behauptet.

§ 75. Zerlegung von Zahlen in die Summe zweier Quadrate.

1. Jede Primzahl von der Form $4n+1$ ist die Summe von zwei Quadratzahlen[1]).

2. Sind x und y ganze Zahlen und

$$m = x^2 + y^2 \tag{1}$$

die Summe ihrer Quadrate, so kann m nur dann ungerade sein, wenn von den beiden Zahlen x, y die eine gerade, die andere ungerade ist, denn die Summe zweier geraden oder zweier ungeraden Zahlen ist immer gerade. Da das Quadrat einer geraden Zahl durch 4 teilbar ist, und das Quadrat einer ungeraden Zahl für den Modul 4 den Rest 1 gibt (§ 72, 3.), so folgt, daß m in der Formel (1), wenn es ungerade ist, eine Zahl von der Form $4n+1$ sein muß. Wenn also eine Primzahl (außer $2 = 1^2 + 1^2$) die Summe zweier Quadrate ist, so ist sie gewiß von der Form $4n+1$. Das Umgekehrte aber, daß jede Primzahl von dieser Form auch wirklich immer die Summe zweier Quadrate ist, war viel schwerer zu beweisen.

Wenn $m = x^2 + y^2$ gesetzt werden kann, worin x und y ganzzahlig sind, so sagen wir, m ist in zwei Quadrate zerlegt oder durch die Summe zweier Quadrate dargestellt. Sind x und y relativ prim, so nennen wir m eigentlich zerlegt oder eigentlich dargestellt; haben x und y einen gemeinsamen Teiler, so ist die Zerlegung oder Darstellung uneigentlich.

Wenn x und y einen gemeinsamen Teiler haben, so muß nach (1) das Quadrat dieses Teilers in m enthalten sein; und wenn also m eine Primzahl sein soll, so müssen x und y relativ prim sein.

3. Wir nehmen jetzt an, es sei eine ungerade Primzahl p zwar noch nicht als Summe zweier Quadrate dargestellt, wohl aber in der Summe zweier Quadrate als Teiler enthalten. Wir setzen also

$$x^2 + y^2 = np \tag{2}$$

und nehmen an, daß x, y und n ganze Zahlen seien, und daß x und y nicht durch p teilbar sind. Wir werden zeigen, wie man daraus andere Zahlen ableiten kann, die einer Gleichung von derselben Form (2) genügen, nur mit verkleinertem n, und wie man so successive zu einer Darstellung von p als Summe zweier Quadrate gelangt.

---

1) Der Satz ist von Fermat ohne Beweis ausgesprochen. Der Beweis rührt von Euler her (1754) (Commentationes arithmeticae, Bd. 1). Heute erscheint der Satz als ganz spezieller Fall der Theorie der quadratischen Formen.

4. Wir setzen durch Division mit p:

$$x = pa + x_1,$$
$$y = pb + y_1,$$

worin a, b die Quotienten, x_1, y_1 die (von Null verschiedenen) Reste der Division sind. Wir nehmen aber nicht die kleinsten positiven Reste, sondern die absolut kleinsten Reste (§ 15, 3.). Es können dann x_1 und y_1 positiv oder negativ sein, es ist aber

$$x_1 < \tfrac{1}{2}p, \quad y_1 < \tfrac{1}{2}p,$$

dem absoluten Werte nach; folglich ist

$$x_1^2 + y_1^2 < \tfrac{1}{2}p^2. \tag{3}$$

Nun ist aber auch

$$x_1^2 + y_1^2 = p^2(a^2 + b^2) - 2p(ax + by) + (x^2 + y^2)$$

wegen (2) eine durch p teilbare Zahl, und es folgt also, wenn wir den Quotienten mit n_1 bezeichnen,

$$x_1^2 + y_1^2 = n_1 p, \tag{4}$$

und mit Rücksicht auf (3) ist

$$n_1 < \tfrac{1}{2}p.$$

Hier können x_1, y_1 nicht durch p teilbar sein, weil sonst $n_1 p$ durch p^2, also n_1 durch p teilbar wäre, was, da $n_1 < p/2$ und von Null verschieden ist, nicht sein kann.

5. Nun setzen wir das Verfahren in ähnlicher Weise fort, nur daß wir jetzt nicht p, sondern n_1 als Divisor nehmen. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= n_1 a_1 + \alpha, \\ y_1 &= n_1 b_1 + \beta, \end{aligned} \tag{5}$$

und bestimmen a_1, b_1 so, daß die Reste α, β dem absoluten Werte nach kleiner als $n_1/2$ oder gleich $n_1/2$ werden, und daß also

$$\alpha^2 + \beta^2 \lesseqgtr \tfrac{1}{2}n_1^2$$

wird. Es ergibt sich aber wieder aus (4) wie oben, daß $\alpha^2 + \beta^2$ durch n_1 teilbar ist, und wir setzen daher

$$\alpha^2 + \beta^2 = n_1 n_2,$$

worin

$$n_2 \lesseqgtr \tfrac{1}{2}n_1 < \tfrac{1}{4}p.$$

Die beiden Zahlen α, β könnten nur dann gleich Null sein, wenn x_1 und y_1 durch n_1 teilbar wären. Dann aber müßte $n_1 p$ durch n_1^2, also p durch n_1 teilbar sein, und, da p Primzahl ist, müßte entweder $n_1 = p$, was, da $n_1 < \frac{1}{2}p$ ist, nicht möglich ist, oder $n_1 = 1$

sein. In diesem letzteren Fall wäre aber durch (4) unser Ziel, p als Summe zweier Quadrate darzustellen, erreicht.

Ist aber n_1 größer als 1, so sind α nnd β nicht beide gleich Null und folglich ist auch n_2 von Null verschieden.

Aus (5) folgt mit Rücksicht auf (4)

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = x_1^2 + y_1^2 - n_1(a x_1 + b y_1) = n_1(p - a_1 x_1 - b_1 y_1),$$
$$\alpha y_1 - \beta x_1 = - n_1(a_1 y_1 - b_1 x_1).$$

Es sind also $\alpha x_1 + \beta y_1$ und $\alpha y_1 - \beta x_1$ durch n_1 teilbar, und wir können zwei ganze Zahlen x_2, y_2 so bestimmen, daß

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = n_1 x_2, \qquad (6)$$
$$\alpha y_1 - \beta x_1 = n_1 y_2$$

wird, woraus man durch Quadrieren und Addieren findet:

$$n_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(x_1^2 + y_1^2)$$

und folglich

$$x_2^2 + y_2^2 = n_2 p. \qquad (7)$$

Wären nun x_2 und y_2 durch p teilbar, so müßte n_2 durch p teilbar sein, was aber, da n_2 kleiner als p ist, nicht möglich ist. Demnach sind x_2, y_2 durch p nicht teilbar.

Die Formel (7) ist aber von derselben Form wie (4), nur daß an Stelle von n_1 das kleinere n_2 getreten ist. Wenn aber n_2 noch nicht gleich 1 ist, können wir das Verfahren noch einmal anwenden, und kommen so schließlich dazu, p selbst als Summe zweier Quadrate darzustellen.

6. Da wir nun in § 71, 6. nachgewiesen haben, daß, wenn p eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, die Kongruenz

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

immer lösbar ist, so können wir n so bestimmen, daß

$$x^2 + 1 = np.$$

Dies stimmt aber mit der Gleichung (2) überein, wenn dort $y = 1$ gesetzt wird. Die Gleichung (2) kann also für jede Primzahl von der Form $4n + 1$ erfüllt werden, und damit ist der Satz 1. bewiesen. Wir haben in dem Gange des Beweises zugleich ein Mittel, die Zerlegung von p in zwei Quadrate wirklich auszuführen, wenn eine Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ gefunden ist.

7. Als Beispiel nehmen wir $p = 1901$. Da in der Formel

$$218^2 + 1 = 25 \cdot 1901$$

der Faktor 25 bereits kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist, so können wir gleich von

(4) ausgehen, also $x_1 = 218$, $y_1 = 1$, $n_1 = 25$ setzen. Dann ergibt sich aus (5)

$$218 = 25 \cdot 9 - 7, \quad 1 = 25 \cdot 0 + 1,$$

also $\alpha = -7$, $\beta = 1$. Zur Bestimmung von x_2, y_2 erhält man nach (6)

$$-7 \cdot 218 + 1 = -25 \cdot 61,$$
$$-7 - 218 = -25 \cdot 9,$$
$$7^2 + 1^2 = 2 \cdot 25,$$

also $x_2 = 61$, $y_2 = 9$, $n_2 = 2$ und folglich

$$61^2 + 9^2 = 2 \cdot 1901,$$

und durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens auf $n_1 = 2$, $x_1 = 61$, $y_1 = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $2x_2 = 61 + 9$, $2y_2 = 61 - 9$:

$$35^2 + 26^2 = 1901.$$

8. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich noch die Sätze:

Sind x und y relativ prim, und ist $m = x^2 + y^2$ die Summe ihrer Quadrate, so ist m entweder ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl; jeder ungerade Primteiler von m ist von der Form $4n + 1$.

Denn wenn x und y beide ungerade sind, so sind ihre Quadrate von der Form $8n + 1$ (§ 72, 3.) und deren Summe also von der Form $8n + 2$ und folglich durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

Andererseits ist nach 3. und 2. jede in m aufgehende Primzahl p selbst die Summe zweier Quadrate und folglich von der Form $4n + 1$.

9. Ist $m = x^2 + y^2$ eigentlich darstellbar durch die Summe zweier Quadrate, p ein in m aufgehender Primteiler ($p = 2$ nicht ausgeschlossen), und $m = pn$, so ist auch n eigentlich darstellbar als Summe zweier Quadrate.

Wir haben nämlich in 8. und 1. nachgewiesen, daß auch p die Summe zweier Quadrate ist:

$$p = a^2 + b^2, \tag{8}$$

und hierin sind, da p Primzahl ist, a und b jedenfalls teilerfremd.

Ist nun

$$m = pn = x^2 + y^2, \tag{9}$$

so ist auch

$$x^2(a^2 + b^2) - b^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$$

durch p teilbar, da sowohl $a^2 + b^2$ als $x^2 + y^2$ durch p teilbar sind. Es muß also, da p Primzahl ist, einer der beiden Faktoren $ax + by$,

$ax - by$ durch p teilbar sein. Wir können annehmen, es sei dies der erste, da wir sonst nur y durch $-y$ zu ersetzen brauchten.

Ferner ist

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = pm$$

auch durch p teilbar, und daraus folgt, daß auch $ay - bx$ durch p teilbar ist. Es gibt demnach zwei ganze Zahlen α, β, die den Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{r|rr} ax + by = \alpha p, & a & b \\ bx - ay = \beta p, & b & -a \end{array}$$

woraus man, wenn man mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert, und den Faktor p weghebt,

$$x = \alpha a + \beta b,$$
$$y = \alpha b - \beta a$$

erhält, und hieraus schließt man zunächst, daß α und β keinen gemeinsamen Teiler haben können; denn jeder gemeinsame Teiler von α und β müßte auch in x und y aufgehen, die nach Voraussetzung relativ prim sind.

Wenn man aber die Gleichungen quadriert und addiert, so folgt

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2),$$

und daraus nach (8) und (9)

$$n = \alpha^2 + \beta^2,$$

w. z. b. w.

Aus 9. aber ergibt sich durch wiederholte Anwendung:

10. Ist m eigentlich zerlegbar in zwei Quadrate, so ist auch jeder Teiler von m eigentlich zerlegbar.

Es ergibt sich weiter:

11. Eine Primzahl p von der Form $4n + 1$ ist nur auf eine Art in die Summe zweier Quadrate zerlegbar.

Angenommen, es sei eine Zahl m von der Form $4n + 1$ auf zwei verschiedene Arten (eigentlich oder uneigentlich) als Summe zweier Quadrate darstellbar

$$m = x^2 + y^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2. \tag{10}$$

Wir nehmen die Zahlen x, y, x_1, y_1 positiv an; es kann dann x weder gleich x_1 noch gleich y_1 sein, da sonst $y = y_1$ oder $= x_1$ sein müßte, und die beiden Darstellungen wären nicht verschieden. Nehmen wir also an, es sei $x > x_1$, dann muß $y < y_1$ sein.

Wir bezeichnen mit δ den größten gemeinschaftlichen Teiler von $x - x_1$ und $y_1 - y$ und setzen

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= x_1 + \delta\alpha, \\ y_1 &= y + \delta\beta, \end{aligned}$$

worin α und β positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Es ergibt sich aus (10)

$$(x_1 + \delta\alpha)^2 + y^2 = (y + \delta\beta)^2 + x_1^2,$$

und daraus nach Weghebung des Faktors δ:

$$2\alpha x_1 + \delta\alpha^2 = 2\beta y + \delta\beta^2;$$

da der gemeinsame Wert dieser beiden Ausdrücke sowohl durch α als durch β teilbar ist, so muß er auch, da α und β relativ prim sind, durch $\alpha\beta$ teilbar sein (§ 15), und wir setzen ihn gleich $\alpha\beta\gamma$, worin γ ebenfalls eine ganze positive Zahl ist. Dann ergibt sich

$$(12)\qquad \begin{aligned} 2x_1 &= \beta\gamma - \delta\alpha, \\ 2y &= \alpha\gamma - \delta\beta \end{aligned}$$

und aus (11)

$$(13)\qquad \begin{aligned} 2x &= \beta\gamma + \delta\alpha, \\ 2y_1 &= \alpha\gamma + \delta\beta. \end{aligned}$$

Hierin sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier positive Zahlen, von denen keine gleich Null ist. Nun bilden wir aus (12) und (13):

$$4(x^2 + y^2) = \alpha^2\gamma^2 + \delta^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \delta^2\alpha^2,$$

also

$$(14)\qquad m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}{4}.$$

Nehmen wir, was uns freisteht, an, es seien x und x_1 gerade und folglich y und y_1 ungerade Zahlen, so ist δ nach (11) durch 2 teilbar und nach (12) ist, da α und β relativ prim, also nicht beide gerade sind, auch γ gerade. Folglich ist $\frac{1}{4}(\gamma^2 + \delta^2)$ eine ganze Zahl, die jedenfalls größer ist als 1. Ebenso ist $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ und folglich ist m durch die Formel (14) in zwei Faktoren zerlegt und kann also keine Primzahl sein, w. z. b. w.

12. Sind x und y relativ prim und $m = x^2 + y^2$ eine ungerade zusammengesetzte Zahl, so gibt es noch eine zweite Darstellung von m als Summe zweier Quadrate.

Ist nämlich $m = m_1 m_2$ und beide Zahlen m_1, m_2 größer als 2, so sind m_1 und m_2 nach 10. gleichfalls durch die Summe zweier Quadrate eigentlich darstellbar. Ist also

$$(15)\qquad m_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad m_2 = x_2^2 + y_2^2,$$

so folgt, wenn wir

$$x' = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad x'' = x_1 x_2 - y_1 y_2,$$
$$y' = x_1 y_2 - y_1 x_2, \quad y'' = x_1 y_2 + y_1 x_2$$

setzen, durch Quadrieren und Addieren:

$$(16) \qquad \begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = m_1 m_2 = m, \\ x''^2 + y''^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = m_1 m_2 = m; \end{aligned}$$

diese beiden Darstellungen von m wären aber nur dann miteinander identisch, wenn entweder $x' = \pm x''$ oder $x' = \pm y''$ wäre. Ersteres wäre aber nur möglich, wenn eine der Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 gleich Null wäre, und dann wären die Darstellungen (15) keine eigentlichen, wie doch vorausgesetzt war. Aus $x' = \pm y''$ aber würde folgen:

$$(x_1 \mp y_1)(x_2 \mp y_2) = 0,$$

also entweder $x_1 = \pm y_1$ oder $x_2 = \pm y_2$. Aber auch dies ist unmöglich, da die Darstellungen (15) eigentliche sind. Die beiden Zerlegungen (16) sind also von einander verschieden, und der Satz 12. damit bewiesen. Es muß aber noch bemerkt werden, daß die beiden Darstellungen (16) nicht notwendig eigentlich zu sein brauchen.

§ 76. Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren.

1. Da die Sätze § 75, 11., 12. die Primzahlen der Form $4n + 1$ von den zusammengesetzten Zahlen dieser Form scharf unterscheiden, läßt sich darauf ein Verfahren gründen, um eine solche Zahl als Primzahl oder als zusammengesetzt zu erkennen.

Es sei nämlich m eine Zahl der Form $4n + 1$, von der noch nicht feststeht, ob sie eine Primzahl ist oder nicht. Wenn m eine Primzahl ist, so läßt sie sich auf eine einzige Art als Summe zweier Quadrate darstellen:

$$(1) \qquad m = x^2 + y^2,$$

ist aber m zusammengesetzt, so läßt sie sich entweder gar nicht oder auf mehrere Arten in diese Form bringen. Ist eine solche Darstellung vorhanden, so können wir annehmen, es sei $x^2 \overline{\overline{<}} y^2$ und dann ergibt sich

$$(2) \qquad x^2 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2} m,$$

und ferner folgt aus (1):

$$(3) \qquad m - x^2 = y^2.$$

Man hat also für x alle der Ungleichung (2) genügenden positiven Zahlen zu setzen und zu untersuchen, ob und wieviel darunter vorkommen, die die Differenz $m - x^2$ zu einer Quadratzahl machen. Kommt nur eine solche Zahl x vor, so ist m Primzahl, kommen

keine oder mehr als eine solche Zahl vor, so ist m zusammengesetzt, und im letzten Fall erhalten wir zugleich aus § 75, 12. eine Zerlegung von m in zwei Faktoren. Euler, dem wir diese Methode verdanken, gibt eine Vorschrift, wie man diese Rechnung in kompendiöser Art anordnen kann. Auch eine Tafel der Quadratzahlen, wie sie z. B. in der früher schon erwähnten „Sammlung mathematischer Tafeln“ von Vega-Hülsse enthalten ist, wird dabei gute Dienste leisten. Man kann aber auch durch die Methode der Exklusion (§ 72, 5.) die Anzahl der zu prüfenden Werte von x sehr verringern. Nimmt man nämlich irgend eine Zahl e als Exkludenten, und einen quadratischen Nichtrest β von e, so sind alle solche Zahlen x auszuschließen, die der Kongruenz

$$m - x^2 \equiv \beta \pmod{e}$$

genügen.

2. Wir wollen als Beispiel die Zahl $m = 19109$ nehmen. Hier hat man x nicht größer zu nehmen als 97, denn $2 \cdot 98^2 = 19208$ ist bereits größer als m.

Die Zahl m ist hier von der Form $8n + 1$, und wenn also x durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist, so ist $m - x^2$ von der Form $8n + 5$, und kann daher kein Quadrat sein, weil 5 quadratischer Nichtrest von 8 ist. Demnach sind alle geraden Zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind, aus der Reihe der x wegzulassen.

Ist ferner x durch 3 teilbar, so ist $m - x^2$ von der Form $3n + 2$ und folglich sind, da 2 quadratischer Nichtrest von 3 ist, auch die durch 3 teilbaren Zahlen wegzulassen.

Der Exkludent 5 gibt als wegzulassen $x \equiv 1, 4 \pmod{5}$ und wenn man in gleicher Weise noch die Exkludenten 7, 11, 13 benutzt, bleiben schließlich für x nur noch die Zahlen

$$5,\ 8,\ 23,\ 47,\ 52,\ 65,\ 68.$$

Wir berechnen daraus die folgende kleine Tabelle:

x	x^2	$m - x^2$
5	25	19 084
8	64	19 045
23	529	18 580
47	2209	16 900
52	2704	16 405
65	4225	14 884
68	4624	14 485,

und nun sind in der letzten Kolonne dieser Tafel die Zahlen aufzusuchen, die Quadrate sind. Dabei fallen auf den ersten Blick noch

weg 19045, 18580, 16405, 14485, die durch 5 aber nicht durch 25 teilbar sind und daher keine Quadrate sein können. Unter den übrigen drei sind die Quadrate enthalten:

$$16\,900 = 130^2, \quad 14\,884 = 122^2,$$

und es ergeben sich also die beiden Zerlegungen:

$$\begin{aligned} 19\,109 &= 47^2 + 130^2 \\ &= 65^2 + 122^2. \end{aligned}$$

Die Zahl 19109 ist also **keine Primzahl**.

Setzen wir, um die Zerlegung zu finden, nach § 75, 11.

$$x = 65, \quad y = 122, \quad x_1 = 47, \quad y_1 = 130,$$

$$x = x_1 + 2 \cdot 9,$$

$$y_1 = y + 2 \cdot 4,$$

$$\alpha = 9, \quad \beta = 4,$$

so ergibt sich der eine Faktor:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 81 + 16 = 97$$

und dann durch Division:

$$19109 = 97 \cdot 197.$$

Auf demselben Wege kann man z. B. nachweisen, daß

$$2^{16} + 1 = 65537$$

eine Primzahl ist, da sich außer der Zerlegung $256^2 + 1^2$ keine andere ergibt.

§ 77. Vollkommene Zahlen.

1. Wenn man die Zerlegung einer Zahl m in ihre Primfaktoren kennt, so ist es leicht, die sämtlichen Divisoren dieser Zahl anzugeben. Es seien, um dies zu zeigen, $a, b, c, \ldots$ die sämtlichen in m aufgehenden voneinander verschiedenen Primzahlen, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Exponenten der höchsten Potenzen dieser Primzahlen, die in m aufgehen, also:

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive ganze Zahlen sind. Ein Divisor d von m kann keine anderen Primzahlen enthalten als m selbst, und keine zu einer höheren Potenz; also ist d in der Form enthalten

$$d = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots,$$

worin $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ auch Null sein können, aber nicht größer als $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$. Es kann also z. B. α' jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots \alpha$

haben. Umgekehrt wird jede Zahl von dieser Form ein Teiler von m sein, wenn man die Zahl 1, für $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0, \cdots$, und die Zahl m selbst, für $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma, \cdots$ unter den Teilern mitzählt.

Die Anzahl der Werte, die α' annehmen kann, ist sonach $\alpha + 1$, die Anzahl der Werte von β' ebenso $\beta + 1$ u. s. f. und da alle diese Werte mit einander kombiniert werden können, so ist die Anzahl der Teiler von m gleich

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \cdots,$$

also unabhängig von den Werten der Primzahlen $a, b, c, \ldots$ und nur abhängig von den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$.

So ist z. B. die Anzahl der Divisoren von $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ gleich $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Ebenso groß ist aber auch die Anzahl der Divisoren der Zahl $5^3 \cdot 7^2 \cdot 2 = 10250$.

2. Eine damit verwandte Aufgabe ist es, die Summe der Divisoren der Zahl m zu bestimmen. Wir wollen diese Aufgabe durch Rekursion lösen. Es sei also

$$m = a^\alpha m',$$

und $m' = b^\beta c^\gamma \cdots$ der Quotient, der sich ergibt, wenn man die eine Primzahlpotenz a^α durch Division weghebt. Unter den Divisoren d von m kommen jedenfalls alle Divisoren d' von m' vor, außerdem aber noch die sämtlichen $ad', a^2d', \ldots a^\alpha d'$ und damit sind die Divisoren von m erschöpft. Bezeichnen wir also mit $S(m)$ die Summe der Divisoren von m, so ist hiernach

$$S(m) = (1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha)\, S(m').$$

Und da nun, wie wir früher (§ 58) gesehen haben,

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$$

ist, so folgt:

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\, S(m').$$

Wendet man dieselbe Formel auf $S(m')$ an, indem man $m' = b^\beta m''$ setzt, also

$$S(m') = \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\, S(m'')$$

und fährt so fort, bis alle Primfaktoren von m erschöpft sind, so ergibt sich, da $S(1) = 1$ ist,

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots,$$

worin rechts so viele Faktoren vorkommen, als Primzahlen $a, b, c, \ldots$ in m aufgehen. Die Brüche sind dabei natürlich nur scheinbar, da

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha$$

eine ganze Zahl ist.

So ist z. B.

$$S(360) = \frac{2^4-1}{2\ -1} \cdot \frac{3^3-1}{3\ -1} \cdot \frac{5^2-1}{5\ -1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

3. Man nennt die Teiler einer Zahl m, die von der Zahl m selbst verschieden sind, echte Teiler von m. Die Summe der echten Teiler ist also gleich $S(m) - m$. Eine Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, heißt eine vollkommene Zahl[1]. Solche Zahlen sind z. B.

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Eine vollkommene Zahl ist also durch die Bedingung definiert $S(m) - m = m$ oder

$$S(m) = 2m. \tag{1}$$

Fragen wir zunächst nach den geraden vollkommenen Zahlen und setzen also

$$m = 2^{n-1}a,$$

worin a eine ungerade ganze Zahl und $n > 1$ sei, dann ergibt die Gleichung (1) mit Benutzung von Nr. 2:

$$(2^n - 1)\,S(a) = 2^n a,$$

und da nun $2^n - 1$ ungerade ist, so muß $S(a)$ durch 2^n teilbar sein. Setzen wir also, indem wir unter θ eine ganze Zahl verstehen:

$$S(a) = 2^n \theta, \tag{2}$$

so erhält man

$$a = \theta\,(2^n - 1), \tag{3}$$

und daraus folgt, daß θ ein Teiler von a sein muß. Aus (2) und (3) folgt aber

$$S(a) = a + \theta.$$

Da hiernach die Summe $a + \theta$ gleich der Summe aller Teiler

---

1) Mit den vollkommenen Zahlen (τέλειοι ἀριθμοί) hat sich das Altertum viel beschäftigt, besonders die Pythagoräer. Bei Euklid findet sich ein Satz darüber, der so ziemlich alles enthält, was wir auch jetzt noch über diese Zahlen wissen (Elemente, Buch IX, Nr. 36). Uns erscheint heute die ganze Fragestellung ziemlich willkürlich, und nur von Interesse wegen der Schwierigkeit der Auffindung solcher Zahlen und wegen des Zusammenhanges, in dem sie mit gewissen großen Primzahlen stehen. Ähnlich verhält es sich mit den befreundeten Zahlen, worunter man Zahlenpaare versteht, deren jede die Summe der echten Teiler der anderen ist (z. B. 220 und 284). Über solche Zahlen hat Euler Untersuchungen angestellt (Commentationes arithmeticae, Bd. I, S. 102).

von a ist, und a und θ Teiler von a sind, so kann a nur zwei Teiler haben, nämlich a und θ. Da aber jede Zahl wenigstens sich selbst und die Einheit zu Teilern hat, so muß $\theta = 1$ und a eine Primzahl sein, die nach (3) die Form hat:

$$a = 2^n - 1,$$

und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist auch umgekehrt (1) durch $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ befriedigt, also m eine vollkommene Zahl. Wir haben also den Satz:

4. Eine gerade Zahl m ist dann und nur dann eine vollkommene Zahl, wenn sie die Form hat

$$m = 2^{n-1}(2^n - 1),$$

und wenn zugleich $2^n - 1$ eine Primzahl ist.

Ungerade vollkommene Zahlen sind nicht bekannt, aber es ist auch bis jetzt nicht bewiesen, daß es keine solchen gibt.

5. Um also vollkommene Zahlen zu finden, kommt es noch weiter darauf an, die Exponenten n zu ermitteln, für die $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Dazu ist zunächst erforderlich, daß die Zahl n selbst eine Primzahl sei. Denn wenn $n = ab$ ist, worin sowohl a als b größer als 1 sind, so besteht die Identität

$$2^{ab} - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b})$$

(Summe der geometrischen Reihe), und da beide Faktoren auf der rechten Seite größer als 1 sind, so ist $2^{ab} - 1$ keine Primzahl.

Bis jetzt sind von den Zahlen $2^n - 1$ die folgenden als Primzahlen erkannt:

$$\begin{aligned}
2^2 - 1 &= 3,\\
2^3 - 1 &= 7,\\
2^5 - 1 &= 31,\\
2^7 - 1 &= 127,\\
2^{13} - 1 &= 8191,\\
2^{17} - 1 &= 131\,071,\\
2^{19} - 1 &= 524\,287,\\
2^{31} - 1 &= 2\,147\,483\,647,\\
2^{61} - 1 &= 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951,
\end{aligned}$$

und demnach sind neun vollkommene Zahlen bekannt. Die letzte dieser Zahlen, $2^{61} - 1$, ist, wie schon früher erwähnt, die größte bis jetzt bekannte Primzahl.

Der Exponent $n = 11$ gibt keine Primzahl, denn es ist $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

§ 78. Entwicklung von Irrationalzahlen in Kettenbrüche.

1. Wenn x eine beliebig gegebene rationale oder irrationale positive oder negative Zahl ist, so gibt es eine bestimmte größte in x enthaltene, d. h. x nicht übertreffende ganze Zahl q, die also der Bedingung genügt

$$q \leqq x < q + 1 .$$

Wenn x negativ ist, so ist auch q negativ, ist x ein positiver echter Bruch, so ist $q = 0$, und ist $x > 1$, so ist q eine positive ganze Zahl. Ist x nicht $= q$, so können wir setzen

$$x = q + \frac{1}{x_1}$$

und es ist $1/x_1 < 1$, also $x_1 > 1$. Wir verfahren nun mit x_1 ebenso wie mit x, bezeichnen mit q_1 die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl, die jetzt positiv ist, und setzen

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

worin x_2 wieder größer als 1 ist. Es kann daher auch geschrieben werden:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}} \cdot \tag{1}$$

Man bildet auf diese Weise den Algorithmus

$$\begin{aligned} x &= q \quad + \frac{1}{x_1}, \\ x_1 &= q_1 \quad + \frac{1}{x_2}, \\ x_2 &= q_2 \quad + \frac{1}{x_3}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} &= q_{n-1} + \frac{1}{x_n}, \end{aligned} \tag{2}$$

und kann damit fortfahren, wenn x_n nicht eine ganze Zahl ist. Substituiert man jedes x_k in den vorangegangenen Ausdruck für x_{k-1}, so erhält man schließlich x ausgedrückt durch einen Kettenbruch, wovon der Ausdruck (1) ein Beispiel ist. Worauf es wesentlich ankommt, ist die Reihe der ganzen Zahlen $q, q_1, q_2, \ldots$, die durch die Natur der Zahl x vollständig bestimmt ist.

2. Wenn x eine rationale Zahl ist, so sind auch $x_1, x_2, \ldots$ rationale Zahlen. Setzen wir $x = a/a_1$, so wird $x_1 = a_1/a_2$, und q ist der Quotient, a_2 der Rest der Division von a durch a_1. Der Algorithmus (2) stimmt dann überein mit dem Euklidischen Algorithmus § 15. Ist aber x irrational, so sind auch alle die folgenden $x_1, x_2, \ldots$ irrational, kein x_n wird ganzzahlig, und der Algorithmus (2) kann unbegrenzt fortgesetzt werden.

Wir betrachten jetzt den Fall eines irrationalen x und nehmen überdies $x > 1$ an, wonach die Zahlen $q, q_1, q_2, \ldots$ alle positiv werden.

3. Wir bilden nun aus den $q, q_1, q_2, \ldots$ eine Zahlenreihe R_n durch die Rekursionsformel

$$R_n = R_{n-1} q_{n-1} + R_{n-2}.$$

Fangen wir mit $n = 1$ an, und nehmen R_{-1}, R_0 beliebig gegeben an, so lassen sich aus dieser Formel $R_1, R_2, R_3, \ldots$, wenn die q_n gegeben sind, eindeutig berechnen.

Wir machen zwei spezielle Annahmen über R_0, R_{-1}, und bezeichnen die Zahlen R der ersten Annahme mit

$$P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots$$

und die der zweiten mit

$$Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots.$$

Ist dann

$$(3) \qquad \begin{aligned} P_{-1} &= 0, \quad P_0 = 1, \\ Q_{-1} &= 1, \quad Q_0 = 0, \end{aligned}$$

so erhalten wir für die beiden Zahlenreihen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} P_n &= P_{n-1} q_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= Q_{n-1} q_{n-1} + Q_{n-2}, \end{aligned}$$

also z. B.

$$P_1 = q, \quad Q_1 = 1,$$
$$P_2 = q q_1 + 1, \quad Q_2 = q,$$

und man kann das allgemeine R_n aus P_n und Q_n in der Form $R_n = a P_n + b Q_n$ darstellen, worin a und b beliebige, von n unabhängige Zahlen sind. Diese Zahlenreihen P_n, Q_n sind dieselben, die wir schon im § 70 betrachtet haben, nur denken wir uns hier die beiden Reihen ohne Ende fortgesetzt.

4. Diese Zahlen P_n, Q_n stehen nun in einer sehr nahen Beziehung zu dem Algorithmus (2).

Man kommt auf sie, wenn man x durch x_n auszudrücken versucht, also die zwischenliegenden $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ eliminiert.

Man erhält so:

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}. \tag{5}$$

Diese Formel gibt $x = x_0$ für $n = 0$ und $x = q + 1/x_1$ für $n = 1$, ist also, wenn x_0 gleichbedeutend mit x ist, in diesen beiden ersten Fällen richtig. Nehmen wir sie als erwiesen an, wenn n durch $n-1$ ersetzt wird, also

$$x = \frac{P_{n-1} x_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_{n-1} + Q_{n-2}},$$

so erhält man, wenn man aus der letzten der Formeln (2) $x_{n-1} = q_{n-1} + 1/x_n$ einsetzt, durch Erweiterung des Bruches mit x_n die Relation (5), die somit allgemein bewiesen ist.

5. Multipliziert man die erste Gleichung (4) mit Q_{n-1}, die zweite mit $-P_{n-1}$ und addiert, so folgt:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}),$$

und demnach ist $(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$ von n unabhängig. Da aber für $n = 0$ der Wert dieser Größe $= 1$ ist, so ist er überhaupt $= 1$ und wir erhalten die wichtige Formel:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \tag{6}$$

Man schließt hieraus zunächst, daß die ganzen Zahlen P_n und Q_n keinen gemeinschaftlichen Teiler haben; denn ein solcher müßte ja auch Teiler von ± 1 sein.

6. Da unter der Annahme, die wir gemacht haben, daß $x > 1$ sei, die $q, q_1, q_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so sind nach (4) auch die P_n und Q_n positive ganze Zahlen; denn diese Zahlen sind nur durch Addition und Multiplikation aus den q gebildet.

Zugleich sieht man aus (4), daß

$$P_n > P_{n-1}, \quad Q_n > Q_{n-1} \tag{7}$$

ist, daß die Zahlen P_n und Q_n also von $n = 0$ an mit n immer wachsen, und da es ganze Zahlen sind, über alle Grenzen. Ist $q = 1$, so ist $P_0 = P_1$, $Q_1 = Q_2$, und das Wachsen beginnt erst von P_1 und von Q_2 an; für alle größeren Werte von n ist aber durch die Ungleichungen (7) die Gleichheit ausgeschlossen. Das Wachsen von P_{n-1} zu P_n oder von Q_{n-1} zu Q_n wird um so stärker sein, je größer die dabei verwandte Zahl q_{n-1} ist.

§ 79. Genäherte Darstellung irrationaler Zahlen durch rationale Brüche.

1. Aus der Formel (5) und (6) § 78 ergibt sich:

$$(1)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}$$

$$= \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

$$(2)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

$$(3)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n+1}(Q_n - Q_{n-2})}{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

und hieraus ergeben sich folgende Schlüsse:

2. Nach (1) ist der rationale Bruch P_n/Q_n größer als x, wenn n gerade, und kleiner als x, wenn n ungerade ist.

3. Aus (3) folgt, da $Q_n - Q_{n-2}$ positiv ist, daß die Brüche

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}, \quad \frac{P_{2n+4}}{Q_{2n+4}}, \ \ldots$$

eine *absteigende*, und die Brüche

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}, \ \ldots$$

eine *aufsteigende* Zahlenreihe bilden, und nach 2. sind alle Glieder der ersten Reihe *größer* als x und die der zweiten *kleiner* als x.

4. Aus (2) ergibt sich, da Q_n über alle Grenzen wächst, daß die Differenz irgend zweier Glieder der beiden Zahlenreihen 3. unter jeden Zahlenwert heruntersinkt, und folglich ist x *zugleich die untere Grenze der ersten und die obere Grenze der zweiten dieser Zahlenreihen.*

Die Brüche P_n/Q_n heißen daher die *Näherungsbrüche* des Kettenbruches x.

5. Die Näherungsbrüche dienen dazu, eine Irrationalzahl (oder auch eine in großen Zahlen ausgedrückte rationale Zahl) durch einen rationalen Bruch mit kleinem Zähler und Nenner angenähert darzustellen. Es gilt darüber der Satz:

Wenn zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen P_{n-1}/Q_{n-1} und P_n/Q_n ein anderer rationaler Bruch M/N eingeschoben wird, der also der Zahl x noch näher kommt als einer dieser Näherungsbrüche, so ist N größer als Q_n.

Wenn nämlich M/N zwischen P_{n-1}/Q_{n-1} und P_n/Q_n liegt, so haben die beiden Differenzen

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

das nämliche Vorzeichen (das positive bei geradem n, das negative bei ungeradem n), und der absolute Wert der ersten Differenz ist größer als der der zweiten.

Daher ist

$$(-1)^n \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > (-1)^n \left(\frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > 0,$$

also auch (nach § 78. (6))

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > (-1)^n \frac{MQ_{n-1} - NP_{n-1}}{NQ_{n-1}} > 0,$$

und mithin

$$N > (-1)^n Q_{n-1} (MQ_{n-1} - NP_{n-1}),$$

und da $(-1)^n (MQ_{n-1} - NP_{n-1})$ eine positive ganze Zahl, also mindestens $= 1$ ist, $N > Q_n$, w. z. b. w.

Nennen wir also einen rationalen Bruch um so *einfacher*, je kleiner sein Nenner ist, so ist dadurch bewiesen, daß jeder Bruch, der der Zahl x näher kommt als ein Näherungsbruch, *minder einfach* ist als der Näherungsbruch.

Nehmen wir beispielsweise die Zahl

$$\pi = 3{,}14159265359\ldots,$$

so erhält man durch gewöhnliche Division:

$$q = 3, \quad q_1 = 7, \quad q_2 = 15, \quad q_3 = 1$$

und folglich die Näherungsbrüche

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113},$$

und wenn man nun diese rationalen Brüche zur Vergleichung wieder in Dezimalbrüche verwandelt:

$$\frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots.$$

§ 80. Kettenbrüche für Quadratwurzeln.

1. Wir wollen die Kettenbruchentwicklung auf die einfachste Art der Irrationalzahlen, die Quadratwurzeln, anwenden. Wir ver-

stehen jetzt unter D eine positive ganze Zahl, von der wir nur voraussetzen wollen, daß sie keine Quadratzahl sei. Aus dieser Annahme folgt, daß jede Gleichung, die außer rationalen Zahlen nur $\sqrt{D}$ enthält, eine zweite Gleichung zur Folge hat, die man erhält, wenn man $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ verwandelt, denn jede solche Gleichung läßt sich auf die Form bringen $A + B\sqrt{D} = 0$, worin A und B rationale Zahlen sind, und wenn nicht $A = 0$ und $B = 0$ und folglich auch $A - B\sqrt{D} = 0$ wären, so würde sich für $\sqrt{D}$ eine rationale Zahl A/B ergeben, was nach § 22 der Voraussetzung widerspricht.

2. Wir wenden nun den Algorithmus § 78. (2) auf $x = \sqrt{D}$ an. Ist q die größte ganze Zahl, die in $\sqrt{D}$ enthalten ist, so ist

$$0 < \sqrt{D} - q < 1,$$

und es wird $1/x_1 = \sqrt{D} - q$, folglich

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - q} = \frac{\sqrt{D} + q}{D - q^2},$$

oder wenn wir

$$q = b_1, \quad D - b_1^2 = c_1$$

setzen:

$$x_1 = \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1}.$$

Ist q_1 die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl, so ergibt sich aus $x_1 = q_1 + 1/x_2$:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} = \frac{c_1}{\sqrt{D} - (c_1 q_1 - b_1)} = \frac{\sqrt{D} + b_2}{c_2},$$

worin, wenn $D = b_1^2 + c_1$ gesetzt wird,

$$b_2 = c_1 q_1 - b_1,$$

$$c_2 = \frac{D - b_2^2}{c_1} = 1 - c_1 q_1^2 + 2 b_1 q_1,$$

$$D - b_2^2 = c_1 c_2$$

gefunden wird.

3. Wir wollen annehmen, es sei bis zu einem gewissen n die Formel

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}, \quad D - b_n^2 = c_{n-1} c_n \tag{1}$$

mit ganzzahligen c_{n-1}, c_n, b_n als richtig erwiesen, und wir beweisen, daß dieselbe Formel für x_{n+1} besteht. Ist q_n die größte in x_n enthaltene ganze Zahl, so folgt

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

und daraus:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - q_n} = \frac{c_n}{\sqrt{D} - (c_n q_n - b)}.$$

Setzen wir also

(2) $$c_n q_n - b_n = b_{n+1},$$

so wird

$$x_{n+1} = \frac{c_n(\sqrt{D} + b_{n+1})}{D - b_{n+1}^2}.$$

Es ist aber

$$D - b_{n+1}^2 = D - b_n^2 - c_n^2 q_n^2 + 2 b_n c_n q_n.$$

Wenn daher

(3) $$c_{n-1} + 2 b_n q_n - c_n q_n^2 = c_{n+1}$$

gesetzt wird, so folgt:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}}, \quad D - b_{n+1}^2 = c_{n+1} c_n.$$

Dadurch ist die Formel (1) allgemein erwiesen.

4. Aus den in Nr. 2. gegebenen Ausdrücken für x_1, b_1, c_1 folgt die Ungleichung

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_1}{c_1} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1},$$

denn es ist $x_1 > 1$ und $\sqrt{D} - b_1 = \sqrt{D} - q$ nach der Bedeutung von q ein positiver echter Bruch. Da c_1 eine positive ganze Zahl, also mindestens $= 1$ ist, so ist auch $(\sqrt{D} - b_1)/c_1$ ein positiver echter Bruch.

Wir nehmen an, es sei die Ungleichung

(4) $$0 < \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}$$

für irgend ein n als richtig erwiesen. Wenn wir unter dieser Voraussetzung ihre Richtigkeit für $n + 1$ beweisen können, so ist damit die Allgemeingültigkeit von (4) dargetan. Es ist aber

$$\frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}} = x_{n+1} > 1,$$

also der eine Teil der Ungleichheit allgemein richtig. Ferner ist

$$\frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{D - b_{n+1}^2}{c_{n+1}(\sqrt{D} + b_{n+1})} = \frac{c_n}{\sqrt{D} + c_n q_n - b_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + q_n},$$

also nach der Voraussetzung (4) positiv und kleiner als 1, da q_n mindestens gleich 1 und $(\sqrt{D} - b_n)/c_n$ positiv ist. Es ist also

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}},$$

und damit ist (4) allgemein bewiesen.

5. Setzen wir

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}, \quad x_n' = \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n},$$

so ist

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_n' = -q_n + \frac{1}{x'_{n+1}},$$

von denen die zweite Gleichung aus der ersten folgt, wenn man $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ verwandelt, was nach Nr. 1 gestattet ist.

Da nun x_n, x_{n+1} unechte, x_n', x'_{n+1} echte Brüche sind (nach (4)), so ist q_n die größte ganze Zahl, die in x_n und zugleich die größte ganze Zahl, die in $1/x'_{n+1}$ enthalten ist, also q_{n-1} die größte ganze Zahl, die in $1/x_n'$ enthalten ist. Bei gegebenem D sind also durch die Zahl x_n, d. h. durch b_n und c_n die ganzen Zahlen q_n und q_{n-1} und folglich auch x_{n+1} und x_{n-1} eindeutig bestimmt.

6. Aus der Ungleichung (4) folgt, daß b_n und c_n positiv sein müssen. Denn erstens müssen sie von gleichem Vorzeichen sein, da sonst $(\sqrt{D} - b_n)/c_n > (\sqrt{D} + b_n)/c_n$ wäre, und zweitens können nicht beide negativ sein, da sonst $(\sqrt{D} - b_n)/c_n$ negativ wäre. Es folgt also aus (4):

$$0 < b_n < \sqrt{D}, \quad c_n < \sqrt{D} + b_n, \quad 0 < c_n < 2\sqrt{D},$$

und hieraus ergibt sich, weil b_n und c_n ganze Zahlen sind, daß für ein gegebenes D nur eine endliche Anzahl von Zahlenpaaren b_n, c_n, und also auch nur eine endliche Anzahl von Zahlen x_n möglich sind. In der Reihe der Zahlen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \tag{5}$$

muß also einmal ein schon früher dagewesenes Glied wiederkehren.

Wenn nun aber $x_k = x_{k+n}$ ist, so ergibt sich aus Nr. 5, daß auch

$$x_{k-1} = x_{k+n-1}, \quad x_{k+1} = x_{k+n+1}$$

sein muß, und folglich muß in der Reihe (5) das zum erstenmal wiederkehrende Glied $x_1 = x_{n+1}$ sein. Daraus folgt weiter $x_2 = x_{n+2}$, $x_3 = x_{n+3}, \ldots$; die Reihe (5) zerfällt also in Perioden

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n], \tag{6}$$

in denen kein Glied zweimal vorkommt, und die Reihe (5) ist aus

einer unbegrenzten Aufeinanderfolge dieser Perioden zusammengesetzt. Daraus ergibt sich weiter, daß die Reihe der Zahlen

(7) $$q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$$

ebenfalls periodisch und aus den Perioden

(8) $$[q_1, q_2, \cdots q_n]$$

zusammengesetzt ist. In der Reihe (8) kann aber dieselbe Zahl q_k auch mehrmals vorkommen. Wir fassen dies so zusammen:

Der Kettenbruch, in den man die Quadratwurzel aus einer positiven ganzen Zahl entwickeln kann, ist periodisch. Die Periode beginnt aber erst mit q_1.

§ 81. Die Pell'sche Gleichung.

1. Wir betrachten jetzt die Näherungsbrüche P_n/Q_n für $\sqrt{D}$. Da die P_n, Q_n mit n unaufhörlich wachsen, so können sie natürlich nicht periodisch sein.

Nach § 78 (5) haben wir die Formel

$$\sqrt{D} = \frac{P_{n+1} x_{n+1} + P_n}{Q_{n+1} x_{n+1} + Q_n},$$

und da $x_{n+1} = x_1 = 1 : (\sqrt{D} - q)$ ist:

$$\sqrt{D} = \frac{(P_{n+1} - q P_n) + P_n \sqrt{D}}{(Q_{n+1} - q Q_n) + Q_n \sqrt{D}},$$

und daraus durch Multiplikation mit dem Nenner

$$(Q_{n+1} - q Q_n)\sqrt{D} + D Q_n = (P_{n+1} - q P_n) + P_n \sqrt{D}.$$

Diese Gleichung zerfällt nach § 80. 1. in die beiden:

$$\begin{array}{r|l} P_n = Q_{n+1} - q Q_n, & \quad P_n \\ D Q_n = P_{n+1} - q P_n, & - Q_n \end{array}$$

und wenn man mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert, und (nach § 78 (6)) $P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n$ setzt:

(1) $$P_n^2 - D Q_n^2 = (-1)^n.$$

Diese Formel bleibt richtig, wenn man n durch $2n, 3n, 4n, \ldots$ ersetzt und ergibt

$$P_{2n}^2 - D Q_{2n}^2 = 1,$$
$$P_{3n}^2 - D Q_{3n}^2 = (-1)^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

denn wir haben bei der Ableitung nur davon Gebrauch gemacht, daß

$[q_1, q_2, \ldots q_n]$ eine Periode des Kettenbruches für $\sqrt{D}$ sei. Es bleibt also alles noch richtig, wenn wir zwei oder drei Perioden zusammenfassen und als eine neue Periode betrachten.

2. Diese Resultate enthalten die Lösung eines berühmten Problems, nämlich die Unbekannten T, U als ganze Zahlen so zu bestimmen, daß sie der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1 \tag{2}$$

genügen, wenn D eine gegebene positive ganze Zahl, aber keine Quadratzahl ist.

Um sie zu lösen, hat man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln. Hat die Periode dieses Kettenbruches eine gerade Gliederzahl n, so wird (2) gelöst durch unendlich viele Zahlen T, U, nämlich durch

$$T = P_{mn}, \quad U = Q_{mn},$$

worin m eine beliebige positive ganze Zahl sein kann. Ist aber n ungerade, so muß in diesen Formeln m gerade angenommen werden, während für ein ungerades m die Gleichung

$$T^2 - DU^2 = -1 \tag{3}$$

erfüllt wäre. Die Gleichung (2) hat also immer unendlich viele Lösungen, während die Gleichung (3) nur für den Fall, daß n ungerade ist, Lösungen hat[1]).

Die Gleichung (2) wird die Pell'sche Gleichung genannt.

Die Größe der Zahlen T und U schwankt sehr unregelmäßig und steht in keinem leicht ersichtlichen Zusammenhang mit der Zahl D. Die Rechnung ist, wenigstens für die kleineren Werte von D, ziemlich einfach, wie wir gleich an einem Beispiel sehen werden.

3. Beispiel:

$$\sqrt{D} = \sqrt{59}. \qquad q = 7. \tag{1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{10}, \quad q_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{10}{\sqrt{59} - 3} = \frac{\sqrt{59} + 3}{5}, \quad q_2 = 2,$$

$$x_3 = \frac{5}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{2}, \quad q_3 = 7,$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{5}, \quad q_4 = 2$$

1) Wenigstens solche Lösungen, die auf dem angegebenen Wege durch die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ erhalten werden können. Daß dies alle Lösungen von (2) und (3) sind, wird in der Zahlentheorie bewiesen.

$$x_5 = \frac{5}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{10}, \quad q_5 = 1$$

$$x_6 = \frac{10}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{1}, \quad q_6 = 14$$

$$x_7 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = x_1 .$$

Die Periode ist also sechsgliedrig:

$$[1, 2, 7, 2, 1, 14],$$

und der Periode voran geht die Zahl $q = 7$.

Daher ergibt sich nach § 78, (3), (4):

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{1},$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{23}{3}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{169}{22}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{361}{47}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{530}{69},$$

also $T = 530$, $U = 69$, und man bestätigt leicht die Richtigkeit der Formel:

$$530^2 - 59 \cdot 69^2 = 1 .$$

Wir führen einige Beispiele mit ihren Resultaten an, ohne die Rechnung hierher zu setzen:

(2) $\sqrt{D} = \sqrt{19}, \quad q = 4, \quad n = 6,$
$T = 170, \quad U = 39, \quad T^2 - 19\,U^2 = 1.$

(3) $\sqrt{D} = \sqrt{103}, \quad q = 10, \quad n = 12,$
$T = 227\,528, \quad U = 22\,419, \quad T^2 - 103\,U^2 = 1.$

(4) $\sqrt{D} = \sqrt{38}, \quad q = 6, \quad n = 2,$
$T = 37, \quad U = 6, \quad T^2 - 38\,U^2 = 1.$

Man kann die Beispiele ganz beliebig herausgreifen und wird, so lange etwa D im ersten Hundert bleibt, niemals zu allzu weitläufigen Rechnungen kommen[1]).

---

1) Eine Tafel der Lösungen der Pellschen Gleichung ist von Degen berechnet (Canon Pellianus, Hafniae 1817). In Legendres Zahlentheorie, Bd. 1, 3. Aufl., 1830, deutsch von Maser (1886), findet sich gleichfalls eine Tafel für alle Werte von D bis 1003. Der jetzt allgemein verbreitete Name „Pell'sche Gleichung" ist unzutreffend, da sich Pell mit der Lösung dieser Gleichung nicht beschäftigt hat. Nach der Ansicht von Eneström (Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 3, Leipzig 1902, S. 204) geht der Irrtum auf eine Verwechselung der beiden englischen Mathematiker Pell und Brouncker zurück, die sich bei Euler findet.

Sechzehnter Abschnitt.

Algebraische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

§ 82. Dreiteilung des Winkels.

1. Unter den geometrischen Problemen, die auf eine Gleichung dritten Grades führen, ist wohl das berühmteste die Dreiteilung des Winkels.

Um diese Gleichung zu bilden, gehen wir aus von der Moivreschen Formel (§ 47, 8.)

$$(\cos \tfrac{1}{3}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{3}\vartheta)^3 = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

und erhalten, wenn wir nach der Entwicklung der dritten Potenz des Binoms das Reelle vom Imaginären sondern,

$$\cos\vartheta = (\cos \tfrac{1}{3}\vartheta)^3 - 3\cos\tfrac{1}{3}\vartheta\,(\sin\tfrac{1}{3}\vartheta)^2,$$

$$\sin\vartheta = 3\,(\cos\tfrac{1}{3}\vartheta)^2 \sin\tfrac{1}{3}\vartheta - (\sin\tfrac{1}{3}\vartheta)^3.$$

Setzen wir darin

$$2\cos\tfrac{1}{3}\vartheta = x,$$

so ergibt die erste dieser Gleichungen, wenn man

$$(\sin\tfrac{1}{3}\vartheta)^2 = 1 - (\cos\tfrac{1}{3}\vartheta)^2$$

setzt,

$$(1) \qquad x^3 - 3x = 2\cos\vartheta,$$

und die zweite

$$(2) \qquad (x^2 - 1)\sin\tfrac{1}{3}\vartheta = \sin\vartheta.$$

Da $\cos\vartheta$ ungeändert bleibt, wenn ϑ um 2π vermehrt oder vermindert wird, so hat die Gleichung (1) außer $2\cos\frac{1}{3}\vartheta$ noch die beiden Wurzeln $2\cos\frac{1}{3}(\vartheta + 2\pi)$, $2\cos\frac{1}{3}(\vartheta - 2\pi)$, wofür man $-2\cos\frac{1}{3}(\pi - \vartheta)$, $-2\cos\frac{1}{3}(\pi + \vartheta)$ setzen kann. Wir haben also hier drei reelle Wurzeln:

$$x_0 = 2\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad x_1 = -2\cos\frac{(\pi-\vartheta)}{3}, \quad x_2 = -2\cos\frac{(\pi+\vartheta)}{3},$$

und die Formel (2) gibt die dazu gehörigen Sinus:

$$\sin\frac{\vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_0{}^2-1}, \quad \sin\frac{\pi-\vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_1{}^2-1}, \quad \sin\frac{\pi+\vartheta}{3} = -\frac{\sin\vartheta}{x_2{}^2-1}.$$

Man kann also, wenn $\cos\vartheta$ oder besser $\log\cos\vartheta$ gegeben ist, die drei Wurzeln der Gleichung (1) mit Hilfe der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln leicht mit der Genauigkeit numerisch berechnen, die diese Tafeln zulassen.

2. Setzen wir $f(x) = x^3 - 3x - 2\cos\vartheta$, so ist die abgeleitete Funktion $f'(x) = 3x^2 - 3$, und es kann die Wurzel $x = \pm 1$ eine Doppelwurzel sein. Dann muß aber $\cos\vartheta = \mp 1$ sein, und es gibt noch die einfache Wurzel $x = \mp 2$. Dieser Spezialfall führt auf die Dreiteilung des rechten Winkels.

3. Wir wollen nun untersuchen, ob sich nicht allgemeinere Gleichungen dritten Grades auf die Form der Gleichung (1) zurückführen und also mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln lösen lassen. Es sei also

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

eine gegebene kubische Gleichung. Wir können sie auf eine einfachere Form bringen, wenn wir

$$\begin{aligned} z &= y - \tfrac{1}{3}A, \\ z^2 &= y^2 - \tfrac{2}{3}Ay + \tfrac{1}{9}A^2, \\ z^3 &= y^3 - Ay^2 + \tfrac{1}{3}A^2y - \tfrac{1}{27}A^3 \end{aligned}$$

setzen, wodurch sie die Form erhält

$$(3) \qquad y^3 + ay = b,$$

wenn

$$\begin{aligned} a &= B - \tfrac{1}{3}A^2, \\ b &= -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - C \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Bezeichnen wir mit h einen unbestimmten Faktor und setzen $x = hy$, so geht (3) in

$$x^3 + ah^2x = bh^3$$

über, und diese Gleichung wird mit (1) identisch, wenn wir h so bestimmen, daß

$$ah^2 = -3, \quad bh^3 = 2\cos\vartheta$$

wird.

Durch ein reelles h kann die erste dieser Gleichungen nur befriedigt werden, wenn a negativ ist. Dann wird

$$h = \sqrt{\frac{-3}{a}}, \quad \cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel, das in unserem Belieben steht, positiv genommen sein mag. Da aber jeder Kosinus dem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist, so kann der Winkel ϑ nur dann bestimmt werden, wenn $-27b^2/4a^3$ ein echter Bruch, also $b^2/4$ kleiner als $-a^3/27$ ist.

Wenn wir also

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

setzen, so muß R negativ sein, und es ergibt sich

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}.$$

Da R bei positivem a jedenfalls positiv ist, so schließt die Voraussetzung des negativen R das negative a schon in sich, aber nicht umgekehrt.

Nehmen wir die Quadratwurzeln positiv, so sind die Werte von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ und damit ein Winkel ϑ zwischen 0 und π bestimmt, der bei positivem b zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, bei negativem b zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt.

Hat man auf diese Weise den Winkel ϑ aus der Logarithmentafel ermittelt, so findet man die drei Wurzeln von (3)

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi-\vartheta}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi+\vartheta}{3}.$$

Ist b positiv, also ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gelegen, so liegen auch die drei Winkel $\frac{1}{3}\vartheta$, $\frac{1}{3}(\pi-\vartheta)$, $\frac{1}{3}(\pi+\vartheta)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und die drei Kosinus sind positiv, also y_1 positiv, y_2, y_3 negativ.

4. Als Beispiel wählen wir die kubische Gleichung

$$z^3 + z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Setzt man darin (um ein positives b zu erhalten)

$$z = -y - \tfrac{1}{3},$$

so folgt für y die Gleichung

$$y^3 - \tfrac{13}{3}y = \tfrac{65}{27},$$

also:

$$b = \frac{65}{27}, \quad a = -\frac{13}{3}, \quad \cos\vartheta = \frac{65}{2\sqrt{13}^3},$$

$$\log\cos\vartheta = 9{,}8409685 - 10, \quad \vartheta = 46^0\ 6'\ 7{,}7'',$$

$$\frac{\vartheta}{3} = 15^0\ 22'\ 2{,}6'', \quad \frac{\pi - \vartheta}{3} = 44^0\ 37'\ 57{,}4'', \quad \frac{\pi + \vartheta}{3} = 75^0\ 22'\ 2{,}6'',$$

$$\begin{aligned} \log y_1 &= 0{,}3660685, & y_1 &= 2{,}323103, \\ \log -y_2 &= 0{,}2341686, & y_2 &= -1{,}714623, \\ \log -y_3 &= 0{,}7843249 - 1, & y_3 &= -0{,}608590. \end{aligned}$$

§ 83. Die Cardanische Formel.

1. Wir haben durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Auflösung der Gleichung

$$y^3 + ay = b \tag{1}$$

unter der Voraussetzung, daß

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

negativ ist, auf die Dreiteilung des Winkels zurückgeführt. Dazu führte die Substitution

$$\cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{27\,R}{a^3}}, \quad y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\vartheta, \tag{2}$$

woraus noch folgt:

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} - \sqrt{R}\right),$$

$$\cos\vartheta - i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} + \sqrt{R}\right).$$

Machen wir auf der linken Seite von der Moivreschen Formel Gebrauch, und nehmen die Kubikwurzeln, so können wir dafür auch setzen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\tfrac{1}{3}\vartheta + i\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}, \\ \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\tfrac{1}{3}\vartheta - i\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Multiplikation dieser beiden Formeln ergibt sich:

$$\frac{-a}{3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} \cdot \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}, \tag{4}$$

und durch Addition:

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}. \tag{5}$$

Hier stellt sich die reelle Wurzel y also dar durch die Summe zweier dritten Wurzeln aus imaginären Größen, und wir werden später noch sehen, daß es auf keine Weise möglich ist, diese Wurzeln

so darzustellen, daß die reelle Größe y durch reelle Radikale ausgedrückt wird. Darum wurde bei den älteren Mathematikern dieser Fall (des negativen R) der irreduzible Fall (casus irreducibilis) der kubischen Gleichung genannt.

2. Nehmen wir aber jetzt R positiv an, so hat jede der beiden Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{R}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{R}}$$

einen reellen Wert, und ihr Produkt gibt

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}-R}=\sqrt[3]{\frac{-a^3}{27}}=\frac{-a}{3},$$

wie die Gleichung (4) verlangt. Der Ausdruck (5) gibt einen reellen Wert y, der der Gleichung (1) auch jetzt noch genügt, wovon man sich durch eine einfache Rechnung überzeugen kann.

Der Ausdruck (5) für die Wurzel einer kubischen Gleichung heißt die Cardanische Formel[1]).

3. Man gelangt zu diesem Resultat auch direkt, ohne den Durchgang durch die trigonometrischen Funktionen.

Man setzt

$$y = u + v$$

und behält sich vor, über eine der beiden Größen u, v noch zu verfügen. Dann ist

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v), \end{aligned}$$

und wenn also y eine Wurzel von (1) sein soll, so muß

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = b$$

sein.

Diese Gleichung kann aber dadurch befriedigt werden, daß man

$$3uv = -a,$$
$$u^3 + v^3 = b$$

setzt. Es ist also die Summe und das Produkt der beiden Größen u^3, v^3 bekannt und man erhält nach § 46, 4.:

---

1) Hieronimo Cardano (Cardanus) Practica arithmeticae generalis 1537. Über die Auflösung der kubischen Gleichungen hat sich ein heftiger Prioritätsstreit erhoben, besonders zwischen Cardanus und Tartaglia (Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. II, S. 482 f.). Ein Schüler des Cardanus, Luigi Ferrari, ist der Erfinder der Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

In dem Ausdruck „casus irreducibilis“ ist das Wort „irreduzibel“ in einem anderen als dem heute üblichen Sinne gebraucht (§ 63).

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = 2\sqrt{R},$$

also

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}},$$

wodurch wieder die Formel (5) für y hergestellt ist. Die beiden Kubikwurzeln u, v stehen in der durch $3uv = -a$ ausgedrückten Abhängigkeit voneinander.

§ 84. Die imaginären Wurzeln.

1. Wir haben früher gesehen, daß wenn man eine Wurzel einer Gleichung kennt, die Bestimmung der übrigen auf die Auflösung einer Gleichung niedrigeren Grades zurückgeführt wird. Eine kubische Gleichung hat drei Wurzeln, und es müssen also, nachdem die eine reelle Wurzel $y_1 = u + v$ gefunden ist, die beiden andern, die dann von einer quadratischen Gleichung abhängen, ermittelt werden. Diese quadratische Gleichung wollen wir bilden.

2. Wenn wir die Funktion $y^3 + ay - b$ durch $y - y_1$ dividieren, so geht die Division auf, und es ergibt sich (§ 61, 3.)

$$y^3 + ay - b = (y - y_1)(y^2 + yy_1 + y_1^2 + a).$$

Die beiden noch fehlenden Wurzeln y_2, y_3 der kubischen Gleichung sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 + yy_1 + y_1^2 + a = 0$$

oder

$$(y + \tfrac{1}{2}y_1)^2 = -\tfrac{3}{4}y_1^2 - a.$$

Setzt man hierin $y_1 = u + v$, $a = -3uv$, so kann man dafür wegen $(u + v)^2 - 4uv = (u - v)^2$ auch schreiben:

$$(y + \tfrac{1}{2}(u + v))^2 = -\tfrac{3}{4}(u - v)^2.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind also

$$-\tfrac{1}{2}(u + v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v),$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon \tag{1}$$

setzen, so ergibt sich durch Quadrierung

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2, \tag{2}$$

und die beiden Wurzeln y_2, y_3 der vorgelegten kubischen Gleichung sind

$$(3) \qquad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v.$$

3. Diese Wurzeln sind (bei reellen u, v, also bei positivem R) konjugiert imaginär.

Es ist, wie aus (1) und (2) hervorgeht, $\varepsilon^3 = 1$, also ε eine imaginäre dritte Wurzel aus 1. Sie genügt der quadratischen Gleichung

$$(4) \qquad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0,$$

und die spezielle kubische Gleichung $x^3 - 1 = 0$ hat die drei Wurzeln 1, ε, ε^2.

§ 85. Die Diskriminante der kubischen Gleichung.

1. Die Bedeutung der Größe R tritt deutlicher hervor, wenn man sie durch die Wurzeln der kubischen Gleichung ausdrückt. Es sei also

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v,$$

folglich, wenn man für ε, ε^2 die Werte $\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right) : 2$, also

$$1 - \varepsilon = \tfrac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \tfrac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3}$$

setzt:

$$y_1 - y_2 = \tfrac{3}{2}(u + v) - i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},$$

$$y_1 - y_3 = \tfrac{3}{2}(u + v) + i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},$$

und hieraus durch Multiplikation:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) &= \tfrac{9}{4}(u + v)^2 + \tfrac{3}{4}(u - v)^2 \\ &= 3(u^2 + v^2 + uv).\end{aligned}$$

Multipliziert man dies noch mit $y_2 - y_3 = i\sqrt{3}(u - v)$, so ergibt sich

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \sqrt{-27}\,(u^3 - v^3),$$

oder nach der Bedeutung von u^3, v^3 (§ 83, 3.)

$$= 2\sqrt{-27R} = \sqrt{-(27b^2 + 4a^3)}.$$

Das Quadrat dieses Ausdruckes:

$$D = (y_2 - y_3)^2 (y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2,$$

heißt die Diskriminante der kubischen Gleichung, die sich hiernach gleich $-4 \cdot 27\,R$ ergibt.

2. Die Diskriminante ist Null, wenn zwei der Wurzeln y_1, y_2, y_3 einander gleich sind, und das Verschwinden der Diskriminante oder

also $D = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung. Es wird in diesem Fall

$$u = v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}},$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

Wenn die Diskriminante D positiv (also R negativ) ist, so sind die drei Wurzeln reell, und wenn D negativ (also R positiv) ist, so hat die Gleichung eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln.

§ 86. Trigonometrische Auflösung kubischer Gleichungen.

1. Wir haben in § 82 gesehen, wie man die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 + ay = b \tag{1}$$

im Falle eines negativen R durch die Dreiteilung des Winkels, also mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln finden kann. Aber auch für ein positives R kann man die Tafeln zur leichteren Auflösung der kubischen Gleichung benutzen.

Wir können dabei b positiv annehmen, denn die Gleichung (1) hat für ein negatives b die entgegengesetzten Wurzeln, wie für das gleich große positive b. Dann haben wir aber zu unterscheiden, ob a positiv oder negativ ist.

2. Bei positivem a setzen wir

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{27}} \operatorname{cotg} \vartheta, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{a^3}{27}} \frac{1}{\sin \vartheta} \tag{2}$$

und erhalten nach § 83, 3.

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg} \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta}\right)} = \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt[3]{\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta}},$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg} \vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}},$$

$$y = u + v = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta}} - \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}\right),$$

oder wenn man

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3 \tag{3}$$

setzt,

$$y = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\operatorname{cotg}\varphi. \tag{4}$$

Nach (2), (3), (4) aber findet man y aus den Tafeln.

3. Bei negativem a setze man

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\operatorname{cotg}\vartheta, \tag{5}$$

$$y = \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3, \tag{6}$$

$$y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\,\frac{1}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Als Beispiel nehme man etwa

$$y^3 - 2y = 2,$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{8}{27}},$$

und erhält mit einer siebenstelligen Tafel $y = 1{,}769292$, worin nur die letzte Stelle etwas unsicher ist[1]).

§ 87. Auflösung der Gleichung vierten Grades.

1. Die Auflösung der Gleichung vierten Grades oder, wie wir auch sagen, der biquadratischen Gleichung läßt sich auf die einer Gleichung dritten Grades zurückführen. Es kann dies auf verschiedenen Wegen geschehen. Am einfachsten führt dazu die Methode von Ferrari[2]), die ganz ähnlich zu Werke geht, wie man bei der Auflösung der kubischen Gleichung verfährt.

Ähnlich wie die Gleichung dritten Grades läßt sich die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

---

1) Ein reiches Material zu Übungsbeispielen gibt E. Lampe in der Wissenschaftlichen Beilage zum Programm der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin, Ostern 1885, „Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade" (Gaertners Verlagsbuchhandlung).

2) Lodovico Ferrari, Schüler von Cardanus, 1522—1565.

durch die Substitution

$$y = x - \tfrac{1}{4}A$$

auf die einfachere Form

(1) $$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

bringen, in der das Glied mit der dritten Potenz der Unbekannten fehlt, und die Koeffizienten a, b, c sind leicht zu bildende Verbindungen der Koeffizienten A, B, C, D.

Man zerlegt nun x in drei Teile

$$2x = u + v + w$$

und bildet

$$4x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu),$$
$$16x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu),$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(u + v + w),$$

und wenn man dies in (1) einsetzt, so folgt:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2a)$$
$$+ 4a(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + b)(u + v + w)$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 16c = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man

(2) $$u^2 + v^2 + w^2 = -2a,$$

(3) $$uvw = -b$$

setzt. Sie wird dann

$$4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 4a(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 16c = 0,$$

und diese ergibt nach (2):

(4) $$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = a^2 - 4c.$$

Bedeutet nun z eine unbestimmte Größe, so folgt aus (2), (3), (4)

$$(z - u^2)(z - v^2)(z - w^2) = z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2,$$

und es sind daher u^2, v^2, w^2 die Wurzeln der kubischen Gleichung:

(5) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

(§ 64, 1.); bezeichnet man also die Wurzeln dieser Gleichung mit z_1, z_2, z_3, so wird

(6) $$u = \sqrt{z_1}, \quad v = \sqrt{z_2}, \quad w = \sqrt{z_3}.$$

Die Vorzeichen dieser drei Quadratwurzeln sind nicht alle drei willkürlich, sondern nach (3) ist eins von ihnen durch die beiden anderen bestimmt. Man erhält so die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b$ ist, in der Form

$$\begin{aligned}
2x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\
2x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung dritten Grades (5) heißt die kubische Resolvente der gegebenen Gleichung vierten Grades. Da $z_1 z_2 z_3 = b^2$ positiv ist, so sind folgende drei Fälle möglich:

1) z_1, z_2, z_3 sind reell und positiv; dann hat die biquadratische Gleichung vier reelle Wurzeln.

2) Zwei der Wurzeln von (5), etwa z_2, z_3 sind negativ, die dritte z_1 ist positiv. In diesem Falle sind alle vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 imaginär, und zwar ist x_1 konjugiert mit x_2, x_3 konjugiert mit x_4.

3) Die kubische Gleichung (5) hat zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, etwa z_2, z_3. Da das Produkt $z_2 z_3$ dann positiv ist, so ist auch z_1 positiv. Die Quadratwurzeln bestimmen wir so, daß $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ konjugiert imaginär sind.

Dann werden x_1 und x_2 reell, x_3 und x_4 konjugiert imaginär.

§ 88. Die Diskriminante der biquadratischen Gleichung.

1. Welcher der drei Fälle 1), 2), 3) stattfindet, läßt sich aus den Koeffizienten der gegebenen Gleichung (1) erkennen, ehe man die Gleichung wirklich aufgelöst hat.

Zu diesem Zweck bildet man zunächst die Differenzen

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, & x_3 - x_4 &= \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
x_1 - x_3 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_3}, & x_2 - x_4 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_3}, \\
x_1 - x_4 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}, & x_2 - x_3 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2},
\end{aligned}$$

woraus sich durch Multiplikation ergibt

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3) \\ &\qquad = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Das Quadrat dieser Größe heißt die Diskriminante der biquadratischen Gleichung. Es ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 und folglich nach § 64 rational durch die Koeffizienten a, b, c darstellbar.

Das Verschwinden der Diskriminante ist die notwendige

und hinreichende Bedingung, daß die biquadratische Gleichung eine Doppelwurzel hat.

2. Die Formel (1) enthält den Satz, daß die Diskriminante der biquadratischen Gleichung gleich der Diskriminante ihrer kubischen Resolvente ist. Um aber die Diskriminante der kubischen Resolvente nach § 85 zu bilden, müssen wir diese zunächst durch die Substitution

$$z = y - \frac{2a}{3}$$

von der zweiten Potenz der Unbekannten befreien. Man erhält dann, wenn man wie in § 82, 3. rechnet, für y die kubische Gleichung

$$y^3 + Ay + B = 0,$$

worin

$$A = -\frac{a^2}{3} - 4c,$$

$$B = -\frac{2a^3}{27} + \frac{8ac}{3} - b^2,$$

und die Diskriminante

$$D = -27B^2 - 4A^3$$

ist wieder gleich der Diskriminante der biquadratischen Gleichung; und wenn man dies ausrechnet, so ergibt sich

$$D = 16a^4c + 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144acb^2 + 256c^3 - 27b^4.$$

3. Um nun die Entscheidung zwischen den drei Fällen 1), 2), 3) zu treffen, bemerken wir, daß der Fall 3), in dem die biquadratische Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, schon durch das negative Vorzeichen von D hinlänglich gekennzeichnet ist.

Es ist also nur noch für den Fall eines positiven D zwischen den zwei Fällen 1), 2), d. h. zwischen den beiden Fällen von vier reellen und vier imaginären Wurzeln zu unterscheiden. Im ersten Fall hat die kubische Resolvente drei positive, im zweiten eine positive und zwei negative Wurzeln.

Nun ergibt sich aber aus der Resolvente § 87, (5) nach den Sätzen § 64:

$$-2a = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$a^2 - 4c = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3,$$

und wenn also die drei Größen z_1, z_2, z_3 positiv sind, so muß

$$a < 0, \quad a^2 - 4c > 0 \tag{2}$$

sein, und wir wollen jetzt nachweisen, daß diese Bedingungen in Ver-

bindung mit $D > 0$ auch hinreichend sind für den Fall von vier reellen Wurzeln.

4. Wenn $D > 0$ ist, so bleibt, da das Produkt der drei Wurzeln gleich b^2, also positiv ist, außer dem eben erwähnten nur noch der Fall übrig, daß von den drei Wurzeln z_1, z_2, z_3 zwei negativ sind. Sei also $z_2 = -\xi_2$, $z_3 = -\xi_3$ und ξ_2, ξ_3 positiv.

Ist nun $a < 0$, so ist

$$z_1 > \xi_2 + \xi_3,$$

$$z_1(\xi_2 + \xi_3) > (\xi_2 + \xi_3)^2,$$

$$z_1(\xi_2 + \xi_3) - \xi_2\xi_3 > \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_3 > 0$$

und folglich

$$z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3 < 0, \quad a^2 - 4c < 0.$$

Es ist also in diesem Falle entweder $a \overline{\gtrless} 0$ oder $a^2 - 4c < 0$, also die Bedingungen (2) nicht erfüllt, die sonach für den ersten Fall charakteristisch sind. Wenn b und mithin eine der Wurzeln z_1, z_2, z_3 gleich 0 ist, so ändert sich nichts in diesen Schlüssen.

5. Wenn D verschwindet, so sind zwei der Größen z_1, z_2, z_3 einander gleich. Es sei also $z_2 = z_3$ und zunächst von Null verschieden. Dann ist z_1 jedenfalls positiv (oder nicht negativ), da $z_1 z_2 z_3 = b^2$ nicht negativ sein kann. Es wird dann

$$2x_1 = \sqrt{z_1} + 2\sqrt{z_2}, \quad 2x_2 = \sqrt{z_1} - 2\sqrt{z_2},$$

$$2x_3 = 2x_4 = -\sqrt{z_1}.$$

Es ist also die Doppelwurzel der biquadratischen Gleichung reell, und x_1, x_2 sind reell oder konjugiert imaginär, je nachdem z_2 positiv oder negativ ist. Es ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realität der Wurzeln genau die Ungleichungen (2).

6. Hierin ist als Spezialfall der enthalten, daß $z_1 = z_2 = z_3 > 0$ ist. Dann wird

$$x_1 = \tfrac{3}{2}\sqrt{z_1}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1}$$

und die biquadratische Gleichung hat eine dreifache Wurzel. Die Bedingung hierfür ist

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = (z - z_1)^3,$$

woraus:

$$3z_1 = -2a, \quad 3z_1^2 = a^2 - 4c, \quad z_1^3 = b^2,$$

und wenn man z_1 eliminiert:

$$a^2 + 12c = 0, \quad 8a^3 + 27b^2 = 0.$$

7. Ist aber $z_2 = z_3 = 0$, dann ergibt sich

$$x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{z_1}, \quad x_3 = x_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1},$$

und die biquadratische Gleichung hat zwei Doppelwurzeln. Diese sind reell oder konjugiert imaginär, je nachdem z_1 positiv oder negativ ist.

Die Bedingungen für diesen Fall sind:

$$b = 0, \quad a^2 - 4c = 0,$$

und z_1 wird positiv oder negativ, je nachdem a positiv oder negativ ist. Wenn endlich z_1, z_2, z_3 alle drei verschwinden, so ist

$$a = 0, \quad a^2 - 4c = 0, \quad b = 0$$

und die biquadratische Gleichung hat eine vierfache Wurzel mit dem Wert Null.

§ 89. Die Gruppe der Gleichung vierten Grades.

1. Der tiefere Grund für die Reduktion der biquadratischen Gleichung auf eine kubische Resolvente beruht auf den Eigenschaften der Permutationsgruppe von vier Elementen (§ 52, 6.)[1]. Diese Gruppe besteht, wie wir gesehen haben, aus 24 Permutationen. Verstehen wir unter den Elementen dieser Permutationen die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 einer biquadratischen Gleichung, so können wir sagen, daß eine symmetrische Funktion eine solche ist, die bei allen diesen Permutationen ungeändert bleibt, und eine solche Funktion ist rational durch die Koeffizienten der Gleichung vierten Grades ausdrückbar, und wenn keine besonderen Relationen zwischen den Wurzeln bestehen, so sind die symmetrischen Funktionen die einzigen, die diese Eigenschaft haben. Denn wenn man umgekehrt die Koeffizienten als symmetrische Grundfunktionen

$$\begin{aligned}
-a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\
-a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\
a_4 &= x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

auffaßt, so ist klar, daß jede rationale Funktion dieser Koeffizienten zugleich eine symmetrische Funktion der x ist, und die x sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$(1) \qquad x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Diese Gruppe von 24 Permutationen wird daher die

---

1) Die Ausbildung der Theorie der Permutationsgruppen und ihrer Verwendung in der Algebra verdanken wir Galois. Évariste Galois ist im Jahre 1832, kaum zwanzigjährig, im Duell gefallen und hat am Abend vor seinem Tode in einem Briefe an einen Freund seine Theorie dargelegt.

Galoissche Gruppe der allgemeinen Gleichung 4ten Grades genannt.

2. Nun ist, wie wir früher allgemein bewiesen haben, in dieser Gruppe eine Gruppe von nur 12 Elementen enthalten, nämlich die Gruppe der geraden Permutationen, und es gibt Funktionen der x, die nur durch die Permutationen dieser Gruppe ungeändert bleiben. Solche Funktionen heißen alternierende Funktionen und die Gruppe der geraden Permutationen darum auch die alternierende Gruppe. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist das Differenzenprodukt

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

dessen Quadrat die Diskriminante ist. Diese Funktion ändert ihr Vorzeichen, wenn irgend eine Transposition, etwa (x_1, x_2) vorgenommen wird, und nimmt den früheren Wert wieder an, wenn zwei oder überhaupt eine gerade Zahl von Transpositionen nacheinander ausgeführt werden.

3. Jede Funktion Q der x, die durch die Permutationen der alternierenden Gruppe ungeändert bleibt, ist rational durch P und durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrückbar.

Denn wenn eine solche Funktion Q_1 durch irgend eine Transposition, etwa (x_1, x_2) in Q_2 übergeht, so geht Q_2 durch abermalige Anwendung einer Transposition wieder in Q_1 über, und die Funktion kann überhaupt keinen andern Wert erhalten als Q_1 und Q_2, weil man alle ungeraden Permutationen aus den geraden durch nachträgliche Ausführung einer Transposition erhält. Demnach ist $Q_1 + Q_2$ eine symmetrische Funktion. Die Differenz $Q_1 - Q_2$ ändert ihr Vorzeichen durch die Vertauschung (x_1, x_2) und sie verschwindet also, wenn $x_1 = x_2$ ist. Es ist daher $Q_1 - Q_2$, als ganze Funktion von x_1 aufgefaßt, durch $x_1 - x_2$ teilbar, und ebenso auch durch die übrigen Differenzen $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4, \cdots$, also auch durch das Produkt P. Der Quotient $(Q_1 - Q_2)/P$ ist aber wieder eine symmetrische Funktion.

Setzt man also $P = \sqrt{D}$, so ist D die Diskriminante, und wenn A, B andere ganze rationale Funktionen der Koeffizienten sind, so ist

$$Q_1 + Q_2 = 2A, \quad Q_1 - Q_2 = 2B\sqrt{D}$$

und folglich

$$Q_1 = A + B\sqrt{D},$$

w. z. b. w.

4. In der Gruppe der 24 Permutationen ist eine Gruppe von 8 Permutationen enthalten, die wir mit G_1 bezeichnen wollen (§ 52, 6.):

$$G_1 = (1),\ (1, 2)(3, 4),\ (1, 3)(2, 4),\ (1, 4)(2, 3),$$
$$(1, 2),\ (3, 4),\ (1, 4, 2, 3),\ (1, 3, 2, 4).$$

Setzt man diese Permutationen zusammen mit zwei nicht zu ihnen gehörigen, z. B. mit

$$(1, 4), (1, 3),$$

die man bei der Komposition an zweite Stelle setzt, so entstehen zwei neue Systeme G_2, G_3, die mit G_1 zusammen die ganze Gruppe von 24 Permutationen ausmachen, nämlich (§ 52, 4.)

$$G_2 = (1,4), (1,2,4,3), (1,3,4,2), (2,3), (1,2,4), (1,4,3), (2,3,4), (1,3,2),$$
$$G_3 = (1,3), (1,2,3,4), (2,4), (1,4,3,2), (1,2,3), (1,3,4), (1,4,2), (2,4,3).$$

G_2 und G_3 sind keine Gruppen im eigentlichen Sinne des Wortes. Denn das Kompositum zweier Elemente, z. B. aus G_2, ist nicht in G_2 enthalten. Sie werden daher als Nebengruppen bezeichnet.

Eine Funktion y_1 der x, die durch die Permutationen von G_1 ungeändert bleibt, kann überhaupt durch alle Permutationen nur drei Werte y_1, y_2, y_3 annehmen und die symmetrischen Grundfunktionen der y

$$-A_1 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$A_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3,$$
$$-A_3 = y_1 y_2 y_3,$$

sind symmetrische Funktionen der x und daher rational durch die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung darstellbar. Die y_1, y_2, y_3 sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0. \tag{2}$$

Jede solche Gleichung heißt eine kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung (1).

Eine dreiwertige Funktion y_1, die durch die Permutationen von G_1 ungeändert bleibt, heißt zu der Gruppe G_1 gehörig.

5. Man kann auf mannigfache Art Funktionen bilden, die zu der Gruppe G_1 gehören, und erhält darnach verschiedene Methoden der Auflösung der biquadratischen Gleichung. Auch die Methode von Ferrari benutzt eine solche Funktion, nämlich

$$z_1 = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

die, wie man sieht, durch G_1 ungeändert bleibt und durch G_2, G_3 in die beiden Funktionen

$$z_2 = \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$z_3 = \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$$

übergeht. Wenn man die drei Wurzeln der kubischen Resolvente kennt, so hat man, um die x zu finden, noch die Quadratwurzeln

aus diesen Wurzeln zu ziehen, zwischen denen noch eine Relation $(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b)$ besteht.

6. Eine andere, noch einfachere Funktion, die zu der Gruppe G_1 gehört, ist

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

die durch G_2 und G_3 in

$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4,$$
$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

übergeht. Die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 lassen sich hier leicht als symmetrische Funktionen berechnen. Es ist nach der im § 64 gebrauchten Bezeichnung

$$- A_1 = \Sigma x_1 x_2 = a_2$$
$$A_2 = \Sigma x_1^2 x_2 x_3 = \Sigma x_1 \, \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4$$
$$= a_1 a_3 - 4 a_4$$
$$- A_3 = \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2$$
$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1^2 + (\Sigma x_1 x_2 x_3)^2 - 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4,$$

ferner

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1 x_2 = a_2 a_4$$
$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 = a_1^2 - 2 a_2,$$

und folglich

$$- A_3 = a_1^2 a_4 + a_3^2 - 4 a_2 a_4,$$

und die kubische Resolvente lautet also bei dieser Annahme:

$$(3) \qquad y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4 a_4) y + 4 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0.$$

Sie vereinfacht sich ein wenig, wenn man die verkürzte Form der biquadratischen Gleichung, in der $a_1 = 0$ ist, zu Grunde legt.

7. Macht man aber, um die Gleichung (3) von der zweiten Potenz der Unbekannten zu befreien, die Substitution

$$3y = t + a_2,$$

so ergibt sich durch einfache Rechnung die Resolvente für t:

$$(4) \qquad t^3 - 3At - B = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$A = a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_4,$$
$$B = 27 a_1^2 a_4 + 27 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3.$$

Die hier auftretenden Koeffizienten A, B heißen die erste und zweite Invariante der biquadratischen Gleichung (1).

8. Hat man die Wurzeln der Resolvente (3), also y_1, y_2, y_3, so kann man die z_1, z_2, z_3 daraus ableiten, denn es ist

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$
$$= a_1^2 - 4a_2 + 4y_1,$$

und man erhält also die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, wenn man hieraus die Quadratwurzeln zieht. Von diesen drei Quadratwurzeln ist eine durch die beiden andern bestimmt, denn es ist

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

eine symmetrische Funktion, die man durch einfache Rechnung so in den Koeffizienten ausdrückt:

$$- a_1^3 + 4a_1 a_2 - 8a_3.$$

9. Eine Funktion u_1, die durch die Vierergruppe

$$(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)$$

ungeändert bleibt, kann sechs verschiedene Werte annehmen. Beschränkt man sich aber auf die geraden Permutationen, so erhält man nur drei Werte u_1, u_2, u_3 und die symmetrischen Funktionen dieser drei Werte

$$- B_1 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$B_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3,$$
$$- B_3 = u_1 u_2 u_3,$$

bleiben durch die alternierende Gruppe ungeändert, und sind also durch die Quadratwurzel $\sqrt{D}$ und die Koeffizienten ausdrückbar. Man erhält so eine neue Art kubischer Resolventen. Die einfachste Annahme, die wir machen können, ist

$$u_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$
$$u_2 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2),$$
$$u_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3).$$

Durch Addition und Multiplikation ergibt sich

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_1 u_2 u_3 = -\sqrt{D},$$

also $B_1 = 0$ und $B_3 = \sqrt{D}$. Etwas weitläufiger ist die Bildung von B_2. Es ergibt sich aber durch Ausmultiplizieren

$$-(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) = \Sigma x_1^2 x_2^2 - \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6 x_1 x_2 x_3 x_4$$
$$= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 3\,\Sigma x_1^2 x_2 x_3$$
$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 = \Sigma x_1\, \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4,$$

und daraus

$$- B_2 = a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12 a_4 = A,$$

worin A dieselbe Bedeutung wie in Nr. 7 hat. Wir haben also die kubische Resolvente

$$u^3 - Au + \sqrt{D} = 0. \tag{5}$$

Hat man u_1, u_2, u_3, so kann man daraus die y_1, y_2, y_3 finden, denn es ist

$$\begin{aligned} u_2 - u_3 &= x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_4 - 2 x_1 x_2 - 2 x_3 x_4 \\ &= a_2 - 3 y_1, \end{aligned}$$

und aus den y erhält man die x wie oben durch Quadratwurzeln.

§ 90. Zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

1. Auf eine Gleichung vierten Grades führt auch die Aufgabe, zwei Unbekannte aus zwei Gleichungen zweiten Grades zu bestimmen. Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten x, y hat die Form

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0. \tag{1}$$

Wenn man eine der beiden Unbekannten, etwa x, willkürlich annimmt, so erhält man die andere auf zwei Arten durch Auflösung einer quadratischen Gleichung

$$by^2 + 2y(c'x + a') + ax^2 + 2b'x + c = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind, wenn b von Null verschieden ist:

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{(c'x + a')^2 - b(ax^2 + 2b'x + c)}$$

oder

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

wenn zur Abkürzung

$$A = c'^2 - ab, \quad B = a'c' - bb', \quad C = a'^2 - bc$$

gesetzt wird.

Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen kann ein vollständiges Quadrat einer linearen Funktion $\alpha x + \beta$ sein, und dann zerfällt die quadratische Funktion $f(x, y)$ in zwei lineare Funktionen

$$by + c'x + a' \pm (\alpha x + \beta).$$

Es findet dies statt, wenn

$$\alpha^2 = A, \quad \alpha\beta = B, \quad \beta^2 = C,$$

also

$$AC - B^2 = 0$$

ist, und dann ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{A}, \quad \beta = B : \sqrt{A} = \sqrt{C}.$$

Die Bedingung für das Zerfallen der quadratischen Funktion in zwei lineare Funktionen ist also

$$(c'^2 - ab)(a'^2 - bc) - (a'c' - bb')^2 = 0,$$

und wenn man dies entwickelt und den Faktor b weghebt:

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0, \tag{2}$$

was man auch in Form einer Determinante darstellen kann (§ 40):

$$\begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung heißt die Determinante der Funktion $f(x, y)$.

2. Wir haben hier angenommen, daß b von Null verschieden sei. Ist $b = 0$, aber a von Null verschieden, so löst man die Gleichung (1) nach x statt nach y auf und gelangt zu demselben Resultat. Sind aber a und b beide gleich Null, so ist c' von Null verschieden, wenn die Gleichung (1) nicht linear ist. Wenn dann die Funktion

$$c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy$$

in zwei lineare Faktoren zerfallen soll, so muß sie die Form haben:

$$2c'(x + m)(y + n),$$

und es ergibt sich

$$c'n = b', \quad c'm = a', \quad 2c'mn = c,$$

woraus man, da c' nicht Null ist, die Relation erhält

$$2a'b' - cc' = 0.$$

Diese Gleichung geht aber aus (2) hervor, wenn $a = b = 0$ gesetzt wird.

Wenn endlich a, b und c' gleich Null sind, so ist die Relation (2) gleichfalls erfüllt.

Dies ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion $f(x, y)$ entweder linear sei oder in zwei lineare Faktoren zerfalle.

3. Es seien jetzt zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten gegeben:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma + 2\alpha'y + 2\beta'x + 2\gamma'xy = 0,$$

aus denen die Werte der Unbekannten bestimmt werden sollen.

In dem besonderen Fall, wo f und φ in je zwei Faktoren ersten Grades zerfallen:

$$f = f_1 f_2, \quad \varphi = \varphi_1 \varphi_2,$$

erhält man vier Lösungen aus je zwei linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1) \quad f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ &2) \quad f_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ &3) \quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ &4) \quad f_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Auf diesen besonderen Fall aber können wir den allgemeinen Fall durch Lösung einer kubischen Gleichung zurückführen.

Wenn wir nämlich unter λ einen beliebigen Koeffizienten verstehen und

$$F = f + \lambda \varphi$$

setzen, so verschwindet die Funktion zweiten Grades F für alle Wertsysteme x, y, die f und φ zugleich zu Null machen.

Nun können wir aber λ auf drei Arten so bestimmen, daß F in zwei lineare Faktoren zerfällt. Wir erhalten hierfür nämlich eine in λ kubische Gleichung, wenn wir nach (3) die Determinante der Funktion F gleich Null setzen:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a + \lambda\alpha, & c' + \lambda\gamma', & b' + \lambda\beta' \\ c' + \lambda\gamma', & b + \lambda\beta, & a' + \lambda\alpha' \\ b' + \lambda\beta', & a' + \lambda\alpha', & c + \lambda\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Wurzeln dieser kubischen Gleichung, so erhält man zwei Funktionen

$$F_1 = f + \lambda_1 \varphi, \quad F_2 = f + \lambda_2 \varphi,$$

die in je zwei lineare Faktoren zerfallen.

Auf diese Weise gelangt man also direkt zu der kubischen Resolvente, ohne erst die Gleichung vierten Grades, die sich durch Elimination der y aus $f = 0$ und $\varphi = 0$ bilden läßt, berechnet zu haben.

4. Man kann auf unendlich viele Arten eine Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten durch zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten ersetzen, und damit die eben besprochene Methode auf die Gleichung vierten Grades anwenden. Am einfachsten ist wohl der folgende Weg.

Ist die gegebene Gleichung vierten Grades:

$$(5) \qquad x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

so setze man

$$(6) \qquad xy - 1 = 0$$

und erhält durch Multiplikation von (5) mit y^2:

$$x^2 + a_1 x + a_2 + a_3 y + a_4 y^2 = 0. \tag{7}$$

Daraus ergibt sich für λ die kubische Resolvente

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}\lambda, & \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}\lambda, & a_4, & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{1}{2}a_1, & \frac{1}{2}a_3, & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung lautet entwickelt:

$$\lambda^3 - \lambda^2 a_2 + \lambda(a_1 a_3 - 4a_4) + 4a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0,$$

und stimmt also überein mit der in § 89, 6. gefundenen Resolvente für y.

5. Diese Resultate erhalten eine anschauliche Bedeutung, wenn man sich der Darstellung durch die analytische Geometrie bedient. Sind x, y rechtwinklige Koordinaten, so bedeutet eine Gleichung zweiten Grades $f(x, y) = 0$ einen Kegelschnitt. Zwei Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ schneiden sich in vier Punkten. Durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 kann man aber auf drei Arten zwei gerade Linien legen, nämlich $\overline{12}$, $\overline{34}$; $\overline{13}$, $\overline{24}$; $\overline{14}$, $\overline{23}$, und wenn man diese Linienpaare hat, so findet man die Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 aus linearen Gleichungen.

Jeder Kegelschnitt, dessen Gleichung die Form $f + \lambda\varphi = 0$ hat, geht durch die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f = 0$, $\varphi = 0$ und die Gesamtheit dieser Kegelschnitte, wenn λ jeden beliebigen Wert erhält, heißt ein Kegelschnittbüschel. In einem solchen Büschel sind drei besondere Kegelschnitte enthalten, die in zwei gerade Linien zerfallen, und die zugehörigen Werte von λ erhält man als Wurzeln der kubischen Gleichung (4). Näheres hierüber enthält der Abschnitt über analytische Geometrie.

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

§ 91. Der Sturmsche Lehrsatz.

1. Für den praktischen Rechner ist die Frage nach der algebraischen Auflösung einer Gleichung von geringerer Bedeutung. Ihm kommt es darauf an, die Wurzeln einer Gleichung, deren Koeffizienten numerisch gegeben sind, auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen zu berechnen, d. h. zwei rationale Zahlen anzugeben, deren Unterschied eine gegebene Größe nicht überschreitet, zwischen denen eine Wurzel liegt. Diese Aufgabe aber läßt sich immer lösen, und es gibt dafür so einfache und wirksame Methoden, daß man ihre Anwendung selbst bei Gleichungen 3ten oder 4ten Grades der Berechnung der algebraischen Ausdrücke, wie sie z. B. die Cardanische Formel gibt, oft vorziehen wird.

2. Wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ rationale Zahlen sind, so wird man zunächst nach § 63 untersuchen, ob vielleicht rationale Wurzeln vorhanden sind; ist a eine solche, so bildet man durch Division $f(x)/(x - a)$ und hat es dann nur noch mit einer Gleichung niedrigeren Grades zu tun. Ja man wird eventuell erst versuchen, die Funktion $f(x)$ in Faktoren niedrigeren Grades zu zerlegen, um die Berechnung der Wurzeln so einfach als möglich zu machen.

3. Sind α und β zwei Zahlen von der Art, daß $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ verschiedene Vorzeichen haben, so ist man sicher, daß zwischen α und β wenigstens eine Wurzel liegt; denn, wenn x in $f(x)$ die Zahlenreihe von α bis β durchläuft, so geht $f(x)$ von negativen zu positiven Werten und muß also dabei durch Null hindurch gehen (§ 66, 5.). Es könnte auch $f(x)$ drei oder fünf, überhaupt eine ungerade Anzahl von Durchgängen durch Null haben; dann liegen drei oder fünf Wurzeln zwischen α und β.

4. Das wissenschaftliche Fundament für jede Näherungsmethode zur Auflösung algebraischer Gleichungen bildet der Sturmsche Lehrsatz[1]), der uns lehrt, mit Sicherheit zu ermitteln, wie viele Wurzeln einer gegebenen Funktion $f(x)$ vom n^{ten} Grade zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen. Der Satz, dessen Grundgedanke überaus einfach ist, beruht auf der Stetigkeit der ganzen Funktionen, nach der eine solche Funktion bei stetiger Veränderung von x nicht von positiven zu negativen Werten übergehen kann, ohne durch den Wert Null hindurchzugehen.

5. Wenn x_1 eine Wurzel von $f(x)$ ist, so ist $f(x)$ durch $x - x_1$ teilbar, und wenn wir

$$f(x) = (x - x_1) F(x) \tag{1}$$

setzen, und mit $f_1(x)$ die abgeleitete Funktion von $f(x)$ bezeichnen, so ist (§ 61, 4.)

$$F(x_1) = f_1(x_1).$$

Wir nehmen an, daß $f(x)$ und $f_1(x)$ keine gemeinsame Wurzel haben, oder daß $f(x)$ zuvor von etwa vorhandenen gemeinsamen Faktoren mit $f_1(x)$ befreit sei. Dann ist $f_1(x_1)$ und folglich auch $F(x_1)$ von Null verschieden und kann positiv oder negativ sein. Es wird dann $F(x)$ dasselbe Zeichen haben, wenigstens so lange x nahe genug bei x_1 liegt.

Aus (1) ergibt sich dann:

Ist $f_1(x_1)$ positiv, und geht x wachsend durch x_1 hindurch, so geht $f(x)$ wachsend durch 0, d. h. von negativen zu positiven Werten.

Ist aber $f_1(x_1)$ negativ, so geht $f(x)$ von positiven zu negativen Werten.

Wir können beides zusammenfassen, indem wir sagen:

Wenn x wachsend durch eine Wurzel x_1 von $f(x)$ hindurchgeht, so gehen die Funktionen

$$f(x), \quad f_1(x)$$

von verschiedenen zu gleichen Zeichen über.

6. Wir führen nun eine Kette von Divisionen aus, genau wie wenn es sich darum handele, den größten gemeinschaftlichen Teiler der beiden Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$ zu finden (§ 62), nur mit dem Unterschied in der Bezeichnung, daß wir die jedesmaligen Reste mit

---

1) J. K. F. Sturm (geb. 1803 in Genf, gest. 1855 in Paris) gab dieses Theorem in einer von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift „Mémoire sur la résolution des équations numériques", 1835.

$-f_2, -f_3, \ldots$ bezeichnen. Sind dann $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ die Quotienten, so erhalten wir die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f &= Qf_1 - f_2, \\
f_1 &= Q_1 f_2 - f_3, \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{m-2} &= Q_{m-2} f_{m-1} - f_m,
\end{aligned}
$$

und da die Grade der Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ immer abnehmen, so setzen wir den Algorithmus so lange fort, bis f_m von x unabhängig geworden ist. Nach der Voraussetzung, daß f und f_1 keinen gemeinsamen Teiler haben, ist f_m von Null verschieden. Es folgt aus dieser Annahme auch, daß in der Sturmschen Kette

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_m \tag{3}$$

für keinen Wert von x zwei benachbarte Glieder $f_\nu, f_{\nu+1}$ zugleich verschwinden können, da für einen solchen auch f und f_1 verschwinden müßten.

7. Für irgend einen Wert von x zählen wir in der Reihe (3) einen Zeichenwechsel, wenn zwei aufeinanderfolgende Glieder f_ν, $f_{\nu+1}$ verschiedene Zeichen haben, und eine Zeichenfolge, wenn sie dasselbe Zeichen haben.

Für jeden Wert von x, für den keine dieser Funktionen verschwindet, haben wir also eine bestimmte Anzahl von Zeichenwechseln. Der Sturmsche Satz hat dann folgenden Inhalt:

> Sind α und β zwei Werte von x und $\alpha < \beta$, so ist die Anzahl der zwischen α und β gelegenen Wurzeln von $f(x)$ gleich der Anzahl der beim Übergang von $x = \alpha$ zu $x = \beta$ verlorenen Zeichenwechsel der Sturmschen Kette (3).

8. Der Beweis dieses Satzes ist jetzt sehr einfach: Ein Verlust oder Gewinn an Zeichenwechseln kann nur dann eintreten, wenn eine der Funktionen der Sturmschen Kette durch Null geht. Ist aber $0 < \nu < m$, und ist $f_\nu(x_0) = 0$, so ist nach (2) $f_{\nu-1}(x_0) = -f_{\nu+1}(x_0)$ und $f_{\nu-1}$ und $f_{\nu+1}$ haben also für $x = x_0$ und in der Nähe dieses Wertes entgegengesetztes Zeichen. In der Reihe der drei benachbarten Funktionen

$$f_{\nu-1}(x), \quad f_\nu(x), \quad f_{\nu+1}(x)$$

wird also vor wie nach dem Durchgang von x durch x_0 ein Zeichenwechsel gezählt, und es tritt also kein Verlust oder Gewinn von Zeichenwechseln ein.

Da f_m überhaupt nicht durch Null geht, so kann also eine Änderung in der Anzahl der Zeichenwechsel nur dann eintreten, wenn x durch eine Wurzel von $f(x)$ hindurchgeht. Daß aber dabei jedesmal

19*

ein Zeichenwechsel verloren geht, haben wir schon in Nr. 5 gezeigt, und hiermit ist der Sturmsche Satz bewiesen.

9. Die Rechnung, die für die Anwendung des Sturmschen Satzes erforderlich ist, wird durch folgende Bemerkungen in manchen Fällen vereinfacht.

Man kann bei der Bildung der aufeinanderfolgenden Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ positive Zahlenfaktoren weglassen, weil dadurch in den Vorzeichen nichts geändert wird und unsere Schlüsse ganz unverändert bleiben.

Kommt man bei der Division zu einer Funktion f_m von der man weiß, daß sie, auch ohne konstant zu sein, zwischen den Grenzen α, β keinen Zeichenwechsel hat, so kann man die Rechnung abbrechen; denn wir haben von f_m eben nur die Eigenschaft benutzt, daß sie zwischen den Grenzen, die man untersuchen will, keinen Zeichenwechsel haben sollte.

10. Beispiel I. Wir wollen für die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

die Sturmsche Kette bilden. Mit Weglassung positiver Zahlenfaktoren ergibt sich

$$f_1(x) = x^2 - 2,$$
$$f_2(x) = 2x - 1,$$
$$f_3(x) = 1,$$

und es ergeben sich folgende Vorzeichen:

$x =$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	3
$x^3 - 6x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Wir haben also für $x = -3$ drei Zeichenwechsel, für $x = +3$ keinen Zeichenwechsel und folglich zwischen diesen Grenzen drei Wurzeln.

Ein Zeichenwechsel geht verloren zwischen -3 und -2. Also liegt eine Wurzel zwischen diesen Grenzen.

Zum zweiten Male geht ein Zeichenwechsel zwischen 0 und 1 und zum dritten Male zwischen 2 und 3 verloren, also haben wir in jedem dieser Intervalle eine Wurzel.

11. Beispiel II.

$$f(x) = x^3 - \tfrac{15}{11}x^2 + \tfrac{5}{11}x - \tfrac{5}{231},$$
$$f_1(x) = x^2 - \tfrac{10}{11}x + \tfrac{5}{33},$$
$$f_2(x) = x - \tfrac{3}{7},$$
$$f_3(x) = 1.$$

Für $x = 0$ haben wir die Zeichen

$$- \quad + \quad - \quad +,$$

also drei Zeichenwechsel, und für $x = 1$

$$+ \quad + \quad + \quad +,$$

folglich drei Wurzeln zwischen 0 und 1.

12. Für die Zwecke des praktischen Rechnens ist die Anwendung des Sturmschen Satzes nicht notwendig, wenn man sich auf anderem Wege davon überzeugen kann, daß nur eine Wurzel zwischen gegebenen Grenzen liegt. Dies ist z. B. gesichert, wenn man die Gesamtzahl der reellen Wurzeln kennt und ebensoviele Intervalle ermittelt hat, in deren jedem wenigstens eine Wurzel liegt.

§ 92. Regula Falsi.

1. Man veranschaulicht sich die Lage der Wurzeln einer Funktion $f(x)$ durch die Geometrie.

Man stellt die Werte der Veränderlichen x durch die Punkte einer geraden Linie dar, auf der x von einem beliebigen Anfangspunkt in einer beliebigen Längeneinheit als Abscisse gemessen wird, die Werte von $y = f(x)$ trägt man auf einer im Punkt x errichteten Senkrechten als Ordinate auf, gleichfalls in einer beliebigen, wenn man will von der ersten verschiedenen Längeneinheit, die positiven nach der einen, etwa der oberen, die negativen nach der entgegengesetzten Seite. Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man eine krumme Linie; die Abscissen der Punkte, in denen $y = 0$ ist, also der Schnittpunkte dieser krummen Linie mit der Abscissenlinie, sind dann die Wurzeln von $f(x)$.

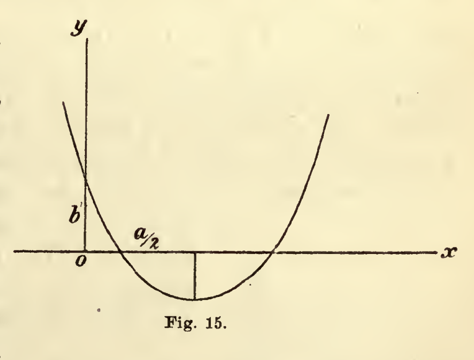


Fig. 15.

Ist z. B. $f(x) = x^2 + ax + b$ vom zweiten Grade, so ist die erwähnte Kurve eine Parabel mit nach unten gekehrtem Scheitel (Fig. 15); $f(x)$ hat zwei reelle Wurzeln, wenn der Scheitel tiefer liegt als die Abscissenlinie, zwei imaginäre, wenn der Scheitel höher liegt.

Das oben betrachtete Beispiel

$$y = x^3 - 6x + 2$$

gibt ungefähr die Fig. 16.

2. Hat man zwei Werte α und β (etwa $\alpha < \beta$), zwischen denen eine Wurzel von $f(x)$ liegt, so sind $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ von entgegengesetzten Zeichen; sei etwa $f(\alpha) = -a$ negativ, $f(\beta) = b$ positiv. Man kann dann α und β als erste Näherungswerte der zwischen ihnen liegenden Wurzel betrachten, deren jeder aber mit einem gewissen Fehler behaftet ist.

Sind z. B. α und β zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, so ist α die Zahl, die bei der Darstellung der Wurzel durch einen Dezimalbruch vor dem Komma steht.

Sei ξ der Fehler von α, also $x = \alpha + \xi$ die gesuchte Wurzel;

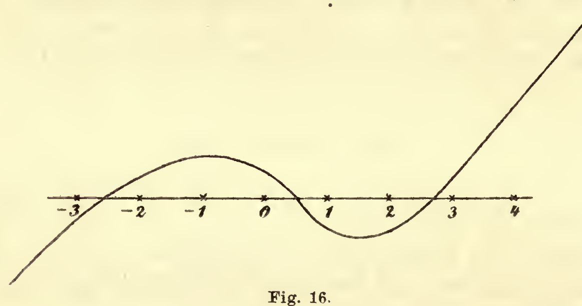


Fig. 16.

dann ist $x = \beta - (\beta - \alpha - \xi) = \beta - \eta$, also der Fehler η von β gleich $(\beta - \alpha - \xi)$; wenn aber α zu klein ist, ist β zu groß. Man nimmt nun zunächst an, daß der Fehler von α größer ist als der Fehler von β, wenn $f(\alpha)$ mehr von der Null abweicht als $f(\beta)$, und angenähert kann man die beiden Fehler dieser Abweichungen proportional annehmen. Es kommt das darauf hinaus, daß man das zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ verlaufende Stück der Kurve, durch die $f(x)$ dargestellt ist, als gerade Linie ansieht (Fig. 17).

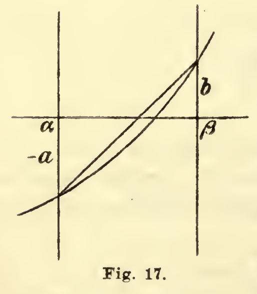


Fig. 17.

Dann ist also

$$\xi : \beta - \alpha - \xi = a : b,$$

$$b\xi = a(\beta - \alpha) - a\xi,$$

(1) $$\xi = \frac{a(\beta - \alpha)}{a + b},$$

also

(2) $$x = \alpha + \xi = \frac{\alpha b + \beta a}{a + b}.$$

Diese Formel ist natürlich nicht genau richtig, gibt aber einen Wert von x, der besser ist als α und als β.

Ist $\beta - \alpha = 1$, so wird

(3) $$\xi = \frac{a}{a + b}$$

ein Ausdruck, der die erste, oder nach Umständen auch mehrere der ersten Dezimalstellen nach dem Komma gibt. Die durch (1) oder (2) dargestellte Formel und darnach auch das ganze Verfahren heißt die Regula falsi.

3. Hat man einen Näherungswert α der Wurzel gefunden, so kann man diesen, wenn er schon einen gewissen Grad der Genauigkeit erreicht hat, noch durch ein anderes Verfahren korrigieren. Man setze $x = \alpha + \xi$ und ordne $f(\alpha + \xi)$, indem man auf die einzelnen Potenzen von $\alpha + \xi$ den binomischen Lehrsatz anwendet, nach Potenzen von ξ, es möge sich so ergeben:

$$f(\alpha + \xi) = m_0 + m_1 \xi + m_2 \xi^2 + m_3 \xi^3 + \cdots. \tag{4}$$

Es soll nun ξ so bestimmt werden, daß dieser Ausdruck verschwindet. Das scheint zunächst keine Vereinfachung der Aufgabe zu ergeben, weil man für ξ eine Gleichung von ebenso hohem Grade erhält, wie die ursprüngliche war. Wenn aber α schon nahe dem wahren Werte ist, so wird ξ ein kleiner Bruch sein, und die höheren Potenzen können für die nächste Annäherung vernachlässigt werden, wenn die Koeffizienten $m_2, m_3, \ldots$ nicht besonders groß sind. Dann ergibt sich also

$$\xi = -\frac{m_0}{m_1} \tag{5}$$

als Näherung für die Korrektion von α.

Bisweilen ist es besser, auch noch das folgende Glied mit zu berücksichtigen, also ξ aus der quadratischen Gleichung

$$m_0 + m_1 \xi + m_2 \xi^2 = 0$$

zu bestimmen, wodurch man

$$\xi = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4 m_0 m_2}}{2 m_2} \tag{6}$$

erhält; das Vorzeichen der Quadratwurzel ist in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von m_1 zu nehmen, damit ξ klein werde.

Dieses Verfahren ist von Newton angegeben, und heißt daher das Newtonsche Näherungsverfahren. Man wendet es auch dazu an, um sich eine vorläufige ungefähre Kenntnis der großen Wurzeln einer Gleichung zu verschaffen, indem man in der entwickelten Funktion $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots$ zunächst nur die beiden obersten Glieder $a_0 x^n + a_1 x^{n-1}$ beibehält, also x, roh angenähert, gleich $-a_1/a_0$ setzt.

4. Bei der Anwendung wird man sich nicht auf die eine dieser Methoden beschränken, sondern je nach Umständen die eine oder die andere benutzen. Das Entscheidende wird immer sein, zwei Dezimal-

brüche α, α' von gleicher Stellenzahl z zu finden, die sich nur in der letzten Stelle um eine Einheit unterscheiden, für die $f(\alpha)$ und $f(\alpha')$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann liegt der wahre Wert der Wurzel zwischen α und α' und der Fehler ist kleiner als 10^{-z}. Will man zur Berechnung der folgenden Stelle übergehen, so hänge man an α die Ziffern 1 bis 10 an, und nehme die beiden daraus hervorgehenden aufeinanderfolgenden Zahlen α_1, α_1', für die $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_1')$ verschiedene Vorzeichen haben. Wenn man in zweckmäßiger Weise die oben beschriebenen Methoden anwendet, so kann man die Anzahl der hierzu zu machenden Versuche sehr einschränken.

Nützlich ist bei diesen Rechnungen die Anwendung von Potenztafeln, oder, wenn die Genauigkeit ausreicht, von Logarithmentafeln.

§ 93. Anwendung auf ein Beispiel.

1. Wir wollen als Beispiel eine Gleichung 5ten Grades nehmen:

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Es ist hier

$$f(-2) = -26,\ f(-1) = +1,\ f(0) = -2,\ f(1) = -5,\ f(2) = +22,$$

und folglich haben wir eine Wurzel x_1 zwischen 1 und 2, eine Wurzel x_2 zwischen -1 und 0, und eine x_3 zwischen -2 und -1, die beiden anderen Wurzeln sind imaginär. Wir berechnen zunächst x_1.

Die Regula falsi § 92, (1) würde hier für ξ die Werte 5/27, also etwa 0,2 ergeben, was zu klein ist, denn man sieht, daß $f(1{,}5) = (\frac{3}{2})^5 - 8 = -13/32$ noch negativ ist, daß also ξ größer als 0,5 sein muß.

Einen besseren Wert gibt uns das Newtonsche Verfahren.

Setzen wir nämlich $x = 1 + \xi$,

$$x^5 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + 5\xi + 1,$$

$$x^5 - 4x - 2 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + \xi - 5,$$

so können wir zwar nicht aus den beiden letzten Gliedern, wohl aber aus den dreien

$$10\xi^2 + \xi - 5 = 0$$

einen Näherungswert finden:

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{201}}{20}, \text{ etwa } 0{,}6.$$

Man rechnet nun nach der folgenden Tabelle, die wohl ohne Erläuterung verständlich ist.

x	$\log x$	$5 \log x$	x^5	$4x + 2$	$f(x)$
1,5	0,1760913	0,8804565	7,593754	8	− 0,406246
1,6	0,2041200	0,0206000	10,485906	8,4	+ 2,085906
1,51	0,1789769	0,8868845	7,707015	8,04	− 0,232985
1,52	0,1818436	0,9092180	8,113682	8,08	+ 0,033682
1,518	0,1812718	0,9063590	8,060444	8,072	− 0,011546
1,519	0,1815578	0,9077890	8,087030	8,076	+ 0,011030
1,5185	0,1814148	0,9070740	8,073726	8,0740	− 0,000274
1,5186	0,1814434	0,9072170	8,076786	8,0744	+ 0,002386
1,51851	0,1814177	0,9070885	8,073996	8,074040	− 0,000034
1,51852	0,1814205	0,9071025	8,074256	8,074080	+ 0,000176
1,518511	0,1814180	0,9070900	8,074024	8,074044	− 0,000020
1,518512	0,1814183	0,9070915	8,074052	8,074048	+ 0,000004

Es ist also sehr nahe

$$x_1 = 1{,}518512.$$

Die letzte Stelle 2 ist um ein weniges zu groß. Die Wurzel liegt aber näher bei diesem Werte, als bei dem unteren Grenzwerte.

2. Es ist noch zu bemerken, daß man aus jedem Zahlenpaar die beiden letzten Dezimalstellen des nächsten Paares nach der Regula falsi durch eine einfache Rechnung, fast könnte man sagen Schätzung, erhält. Es ist dabei zu bemerken, daß in diesem Beispiel die Regula falsi immer die untere Grenze gibt, was sich leicht daraus erklärt, daß zwischen 1 und 2 die Kurve $y = f(x)$ ihre hohle Seite nach oben kehrt.

So findet man aus 1,5 und 1,6:

$$\xi = \frac{0{,}406246}{2{,}492152}\, 0{,}1 = 0{,}01 \cdots.$$

Am Anfang der Rechnung genügt es, eine geringere Stellenzahl zu berücksichtigen. Wir haben die Wurzel mit der Genauigkeit berechnet, die mit einer siebenstelligen Logarithmentafel zu erreichen ist. Will man größere Genauigkeit, so muß man entweder größere Tafeln anwenden, oder, was auch durchführbar, wenn auch umständlicher ist, ohne Logarithmen rechnen, wobei sich die abgekürzte Multiplikation anwenden läßt.

3. Um die negativen Wurzeln zu berechnen, kann man $x = -y$ setzen und die positiven Wurzeln von

$$y^5 - 4y + 2 = 0$$

suchen. Man erhält so

$$x_2 = -0{,}5084994\,,$$
$$x_3 = -1{,}2435964\,.$$

4. Unsere Gleichung hat noch ein Paar konjugiert imaginäre Wurzeln. Um diese gleichfalls näherungsweise zu ermitteln, setzt man

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und erhält nach dem Moivreschen Satze:

$$x^5 - 4x - 2 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) - 4r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 2,$$

und wenn also die Gleichung befriedigt sein soll, so muß

$$r^5\cos 5\varphi - 4r\cos\varphi - 2 = 0,$$
$$r^5\sin 5\varphi - 4r\sin\varphi = 0$$

sein. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$(1) \qquad r^4 = \frac{4\sin\varphi}{\sin 5\varphi},$$

und dann gibt die erste:

$$2r(\sin\varphi\cos 5\varphi - \cos\varphi\sin 5\varphi) = \sin 5\varphi,$$

woraus

$$(2) \qquad r = -\frac{\sin 5\varphi}{2\sin 4\varphi}.$$

Bezeichnet man mit ψ das Komplement von φ, setzt also $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, so ergibt sich aus (1) und (2)

$$(3) \qquad r^4 = \frac{4\cos\psi}{\cos 5\psi}, \quad r = \frac{\cos 5\psi}{2\sin 4\psi}$$

und

$$x = r\sin\psi + ir\cos\psi\,.$$

Aus (3) erhält man, wenn man die zweite Gleichung in die 4te Potenz erhebt und dann beide Ausdrücke für r^4 einander gleichsetzt:

$$(4) \qquad (\cos 5\psi)^5 - 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0\,.$$

Setzt man hier $\psi = 0$, so wird die linke Seite $= 1$, also positiv. Setzt man aber $\psi = 10^0$, so wird $\cos 5\psi = \sin 4\psi$, also die linke Seite

$$(\sin 40^0)^4(\sin 40^0 - 64\cos 10^0),$$

was offenbar negativ ist. Folglich liegt eine Wurzel der Gleichung (4) zwischen $\psi = 0$ und $\psi = 10^0$.

Berechnet man etwa mit fünfstelligen Tafeln die Logarithmen der beiden Ausdrücke

$$(\cos 5\psi)^5, \quad 64 \cos\psi (\sin 4\psi)^4$$

für einige Gradzahlen zwischen 0 und 10, so ergibt sich, daß der Zeichenwechsel zwischen $\psi = 4^0$ und $\psi = 5^0$ stattfindet. Hierauf läßt sich die Regula falsi anwenden, durch die man ψ in der Nähe von $4^0\,40'$ findet. Nimmt man $\psi = 4^0\,30', 4^0\,40'$, so findet man wieder durch die Regula falsi einen Wert in der Nähe von $4^0\,38'$. Man berechnet nun

$$\begin{array}{ll} \psi = 4^0\,38' & \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81745 - 1 \\ & \log 64 \cos\psi (\sin 4\psi)^4 = 0{,}81368 - 1; \\ \psi = 4^0\,39' & \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81610 - 1 \\ & \log 64 \cos\psi (\sin 4\psi)^4 = 0{,}81871 - 1. \end{array}$$

Der Unterschied ist also das eine Mal positiv, das andere Mal negativ, und folglich liegt ψ zwischen $4^0\,38'$ und $4^0\,39'$. Setzt man $\psi = 4^0, 38'\,30''$ so folgt:

$$\log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}8167625 - 1$$
$$\log 64 \cos\psi (\sin 4\psi)^4 = 0{,}8166885 - 1.$$

Die Differenz ist 0,000074, folglich ist $\psi = 4^0\,38'\,30''$ ein guter (etwas zu kleiner) Näherungswert.

Aus (3) erhält man dann

$$\log r = \log\cos 5\psi - \log\sin 4\psi - \log 2;$$

$$\begin{array}{ll} \log\cos 5\psi & = 0{,}9633525 - 1 \\ \log\sin 4\psi & = 0{,}5029838 - 1 \\ \log 2 & = 0{,}3010300 \\ \hline \log r & = 0{,}1593387 \\ \log\sin\psi & = 0{,}9080762 - 2 \\ \log\cos\psi & = 0{,}9985733 - 1 \\ \hline \log(r\sin\psi) & = 0{,}0674149 - 1 \\ \log(r\cos\psi) & = 0{,}1579120, \end{array}$$

folglich sind die beiden imaginären Wurzeln annähernd gleich

$$x = 0{,}11679 \pm i \cdot 1{,}4385,$$

und ihr absoluter Wert

$$r = 1{,}44424.$$

§ 94. Entwicklung der reellen Wurzeln in Kettenbrüche.

1. Wir haben im § 78 gesehen, wie sich jede irrationale Zahl durch einen Kettenbruch darstellen läßt, und haben dies spezieller durchgeführt bei den Quadratwurzeln.

Hat man umgekehrt eine hinlängliche Zahl aufeinander folgender Teilnenner, so erhält man genäherte Darstellungen der irrationalen Zahl durch rationale Brüche. Diese werden sich um so mehr dem wahren Werte der Irrationalzahl annähern, je schneller die Nenner der Näherungsbrüche $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ anwachsen, und es ist daher für die Rechnung günstig, wenn unter den Teilnennern $q, q_1, q_2, \ldots$ bald eine verhältnismäßig große Zahl vorkommt.

2. Ist nun die Irrationalzahl x als Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ gegeben, so kann man diese Kettenbruchentwicklung direkt finden, und erhält also eine weitere Näherungsmethode zur numerischen Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung.

Wir nehmen an, es sei, nötigenfalls nach dem Sturmschen Satz, eine positive ganze Zahl q ermittelt, sodaß zwischen q und $q+1$ eine oder mehrere Wurzeln von $f(x)$ liegen. Man setzt dann

$$x = q + \frac{1}{x_1} = \frac{q x_1 + 1}{x_1},$$

und erhält für x_1 wieder eine Gleichung n^{ten} Grades

$$x_1^n f\left(\frac{q x_1 + 1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0,$$

die so viele reelle Wurzeln größer als 1 hat, als die gegebene Funktion $f(x)$ Wurzeln zwischen q und $q+1$ hat.

Man wähle eine Zahl q_1 so, daß zwischen q_1 und $q_1 + 1$ wenigstens eine Wurzel von $f(x_1)$ liegt, und setze

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}.$$

Man erhält dann wieder eine Gleichung n^{ten} Grades für x_2.

$$x_2^n f_1\left(\frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}\right) = f_2(x_2) = 0,$$

die wieder wenigstens eine Wurzel größer als 1 hat.

Und so kann man fortfahren. Wenn zwischen q und $q+1$ mehr als eine Wurzel von $f(x)$ liegt, so erhält man unter Umständen mehrere Werte für q_1. Ebenso kann man mehrere Werte für q_2 finden; aber endlich gelangt man dazu, die sämtlichen Wurzeln zwischen q und $q+1$ voneinander zu trennen.

Der Wert von x stellt sich dann durch den Kettenbruch

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

dar.

3. Da man zur Erreichung einer beträchtlichen Annäherung an den wahren Wert einer Wurzel x meist eine große Zahl von Teilnennern berechnen muß und die Bildung der Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ sehr mühsam ist, so ist diese Methode mehr von theoretischem Interesse als zu rechnerischen Zwecken brauchbar.

Nur in den Fällen, die jedoch als Ausnahmen zu betrachten sind, wo in der Reihe $q, q_1, q_2, \ldots$ bald eine verhältnismäßig große Zahl auftritt, erhält man bessere Resultate.

Ein Beispiel dieser Art bietet die kubische Gleichung

$$x^3 - 2x - 2 = 0.$$

Man erhält die successiven Umformungen:

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x - 2 &= 0, & q &= 1,\\
3x^3 - x^2 - 2x - 1 &= 0, & q_1 &= 1,\\
2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 &= 0, & q_2 &= 3,\\
9x^3 - 22x^2 - 14x - 2 &= 0, & q_3 &= 2,\\
46x^3 - 6x^2 - 32x - 9 &= 0, & q_4 &= 1,\\
x^3 - 94x^2 - 132x - 46 &= 0, & q_5 &= 95,\\
3561x^3 - 9083x^2 - 191x - 1 &= 0, & q_6 &= 2,
\end{aligned}$$

und aus der Reihe der Teilnenner

$$(1, 1, 3, 2, 1, 95, 2, \ldots)$$

ergibt sich die Reihe der Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{23}{13}, \frac{2201}{1244}, \frac{4425}{2501}, \cdots;$$

von diesen Brüchen ist abwechselnd der eine kleiner, der andere größer als x. Die beiden letzten geben, in Dezimalbrüche verwandelt:

$$1{,}76929260, \quad 1{,}76929228,$$

und der Fehler in der letzten, etwas zu kleinen, Zahl ist kleiner als

$$0{,}00000016.$$

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

§ 95. Einheitswurzeln.

1. Wenn wir irgend eine komplexe Größe z durch den absoluten Wert und die Phase darstellen:

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so ist (§ 47, 8.)

$$z^n = r^n \cos(n\vartheta + i\sin n\vartheta), \tag{1}$$

und hiernach können wir die Aufgabe lösen, alle Zahlen zu finden, deren n^{te} Potenz einer gegebenen (reellen oder komplexen) Zahl c gleich ist, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$z^n = c$$

zu finden. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muß diese Gleichung n Wurzeln haben.

2. Setzen wir

$$c = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und nehmen ϱ positiv, φ zwischen den Grenzen 0 und 2π an, so ergibt sich

$$r^n \cos n\vartheta = \varrho\cos\varphi, \quad r^n \sin n\vartheta = \varrho\sin\varphi.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen quadrieren und addieren, so folgt $r^{2n} = \varrho^2$, und wenn r positiv sein soll, so ergibt sich hieraus

$$r = \sqrt[n]{\varrho},$$

worunter die einzige existierende reelle positive n^{te} Wurzel aus ϱ verstanden ist.

3. Ist r so bestimmt, so folgt

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi, \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Hierdurch ist aber der Winkel ϑ nicht eindeutig bestimmt. Es

gilt nämlich in der Trigonometrie der Satz, daß sich zwei Winkel, die denselben Sinus und denselben Cosinus haben, nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden können, und demnach ist, wenn m eine beliebige (positive oder negative) ganze Zahl bedeutet,

$$n\vartheta = \varphi + 2\pi m, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}.$$

Andererseits aber ergeben zwei Werte von ϑ, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben Wert von z. Wenn wir also $m = qn + k$ setzen, worin k den Rest der Division von m durch n bedeutet, also

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi q,$$

so ergeben alle möglichen Werte der ganzen Zahl q dasselbe z, und man erhält hiernach gewiß alle verschiedenen Werte der n^{ten} Wurzel aus c, wenn man $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ setzt, in der Form

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right],$$

und hierfür kann man nach § 47, 6. auch setzen:

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

oder auch nach (1):

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

4. Setzen wir zur Abkürzung

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

so ist $\varepsilon^n = 1$ und folglich auch $\varepsilon^{kn} = 1$. Das Produkt der beiden konjugiert imaginären Zahlen

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

ist gleich 1 und folglich können wir

$$\varepsilon^{-k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

setzen. Zugleich ist $\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{n-k}$. Die Werte

$$(2) \qquad 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{n-1}$$

sind aber alle untereinander verschieden. Denn wäre etwa $\varepsilon^k = \varepsilon^h$, so könnten sich nach der schon benutzten Eigenschaft der trigono-

metrischen Funktionen $2\pi k/n$ und $2\pi h/n$ nur durch ein Vielfaches von 2π also, k/n und h/n nur um eine ganze Zahl unterscheiden, was nicht möglich ist, wenn h und k verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$ sind.

5. Die Größen (2) heißen die n^{ten} Einheitswurzeln. Es gibt deren n voneinander verschiedene.

Sie sind die Wurzeln der Funktion $x^n - 1$.

Man erhält die sämtlichen n^{ten} Wurzeln einer gegebenen Zahl c, wenn man eine von ihnen mit den n^{ten} Einheitswurzeln multipliziert. Es gibt also (außer wenn $c = 0$ ist) n und nicht mehr verschiedene n^{te} Wurzeln aus c, und folglich auch nicht mehr als n verschiedene n^{te} Wurzeln aus 1.

6. Auf einer Kreisperipherie, deren Halbmesser wir zur Längeneinheit wählen, können die Winkel um den Mittelpunkt durch die zugehörigen Bogen gemessen werden. Dem ganzen Winkelraum von vier Rechten entspricht dann die ganze Kreisperipherie mit der Maßzahl 2π. Teilen wir die ganze Peripherie in n gleiche Teile, so erhalten wir in den Teilpunkten die Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons und zwar eines n-Ecks.

7. Nach der geometrischen Darstellung des Imaginären (§ 47) sind die Eckpunkte dieses Polygons, wenn wir einen von ihnen in den Punkt $x = 1$, $y = 0$ verlegen, die Bildpunkte der n^{ten} Einheitswurzeln, also der komplexen Größen (2). Wir nennen den Punkt, der, von 0 aus gerechnet, dem Winkel $2\pi k/n$ entspricht, den k^{ten} Eckpunkt des Polygons, so daß der Ausgangspunkt der n^{te} oder auch der nullte Eckpunkt ist.

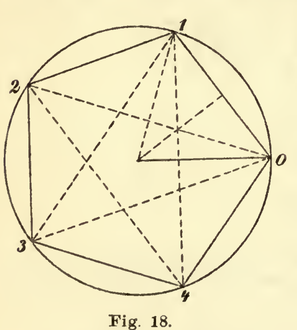


Fig. 18.

Wenn wir die Seite des regelmäßigen n-Ecks mit S_n bezeichnen, so ergibt sich aus der Figur 18

$$S_n = 2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot$$

Diese Größen S_n lassen sich sowohl geometrisch als algebraisch bestimmen. Nach der analytischen Geometrie lassen sich aber die Schnittpunkte von Kreisen, deren Mittelpunkte und Radien gegeben sind, und ebenso die Schnittpunkte von Kreisen und geraden Linien algebraisch durch die Wurzeln quadratischer Gleichungen bestimmen, und umgekehrt kann man eine Quadratwurzel aus gegebenen Zahlen, wenn man diese Zahlen durch Strecken darstellt, geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruieren, also auf die Schnittpunkte von Kreisen oder von Kreisen und Geraden zurückführen.

Wenn sich also die algebraische Bestimmung von S_n durch eine Kette von Quadratwurzeln bewerkstelligen läßt, so ist die geometrische Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit dem Zirkel und dem Lineal allein ausführbar, und es gilt auch umgekehrt: Wenn die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit Zirkel und Lineal möglich ist, so führt die algebraische Bestimmung der n^{ten} Einheitswurzeln auf eine Kette von algebraischen Gleichungen.

8. Setzen wir

$$S_{n,k} = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

so ist $S_{n,k}$ die Sehne des Kreises, die man erhält, wenn man einen Eckpunkt des Polygons, den wir als Ausgangspunkt wählen und mit Null bezeichnen, nicht mit den nächstfolgenden, sondern erst mit dem k^{ten} darauffolgenden verbindet. Es ist dann $S_{n,k} = S_{n,n-k}$. Ist k größer als h und kleiner als $n-1$ und teilerfremd zu n, so ist $S_{n,k}$ die Seite eines der überschlagenen (sternförmigen) Polygone (man sehe die Figur 18 beim Fünfeck), wenn aber k und n einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so gibt $S_{n,k}$ die Seite eines Polygons von geringerer Seitenzahl.

9. Ist S_n bekannt, so kann man daraus S_{2n} durch eine Quadratwurzel, also auch durch eine geometrische Konstruktion ableiten (Zweiteilung des Winkels).

Dies ergibt sich am einfachsten aus den trigonometrischen Formeln

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a,$$
$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

von denen die zweite für $a = \pi/n$ ergibt

$$2 - \sqrt{4 - S_n^2} = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 = S_{2n}^2,$$

und aus der ersten folgt dann:

$$2 + \sqrt{4 - S_n^2} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 = 4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

Wenn wir also der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen geben, so erhalten wir die Halbierung des Nebenwinkels von π/n.

Wir können daher immer durch geometrische Konstruktion aus dem n-Eck das $2n$-Eck, aus diesem das $4n$-Eck u. s. f. ableiten, und wir wollen uns daher von jetzt an auf die Annahme beschränken, daß n ungerade sei.

10. Hat man umgekehrt das $2n$-Eck, so erhält man daraus das n-Eck durch Überspringen von je einem Eckpunkt, z. B. das Dreieck aus dem Seckseck, das 5-Eck aus dem 10-Eck u. s. f.

Die Seite S_{2n} für ein ungerades n läßt sich aber direkt durch die n^{ten} Einheitswurzeln ε ausdrücken. Es ist nämlich

$$S_{2n} = 2 \sin \frac{\pi}{2n} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2 \cos \frac{n-1}{4} \frac{2\pi}{n}$$
$$= \quad - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = - 2 \cos \frac{n+1}{4} \frac{2\pi}{n}.$$

Andererseits ist nach 4.:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2 \cos \frac{2\pi k}{n},$$

und wir erhalten also, jenachdem $n - 1$ oder $n + 1$ durch 4 teilbar, also n von der Form $4m + 1$ oder $4m - 1$ ist:

$$(3) \qquad \begin{aligned} S_{2n} &= \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}, \quad n = 4m + 1, \\ S_{2n} &= -\varepsilon^{\frac{n+1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n+1}{4}}, \quad n = 4m - 1. \end{aligned}$$

11. Wenn a, b natürliche Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, so können wir (nach § 70) zwei ganze positive Zahlen x, y so bestimmen, daß

$$bx - ay = 1$$

wird. Dann ist, wenn $ab = n$ gesetzt wird,

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b},$$

und man erhält also die Seite des n-Ecks, wenn man den Punkt $2\pi x/a$ mit dem Punkte $2\pi y/b$ verbindet. So ergibt sich beispielsweise die Seite des regelmäßigen 15-Ecks, wenn man die zweite Ecke des 5-Ecks mit der ersten des Dreiecks verbindet.

Es gibt im ganzen vier verschiedene regelmäßige 15-Ecke, deren erste Teilpunkte bei $2\pi/15$, $4\pi/15$, $8\pi/15$, $14\pi/15$ liegen. Diese findet man, wenn man einen der Dreieckspunkte mit den vier Eckpunkten des Fünfecks verbindet.

Hiernach können wir uns im folgenden mit der Betrachtung solcher Polygone begnügen, deren Seitenzahl eine ungerade Primzahl oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist.

§ 96. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln.

1. Die Formel für die Summe der geometrischen Progression (§ 58) oder die Division von $x^n - 1$ durch $x - 1$ nach § 61 ergibt:

$$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1.$$

Setzen wir hierin für x irgend eine n^{te} Einheitswurzel, so wird die rechte Seite $= 0$, und es muß also auch die linke verschwinden. Für

$x = 1$ verschwindet der erste Faktor $x - 1$, während der zweite den Wert n annimmt. Setzt man aber für x eine von 1 verschiedene Wurzel, also eine der Größen (§ 95. (2))

$$\varepsilon, \; \varepsilon^2, \; \varepsilon^3, \; \ldots \; \varepsilon^{n-1},$$

so muß der andere Faktor verschwinden. Es sind daher die Potenzen von ε die Wurzeln der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0, \tag{1}$$

und diese Gleichung hat auch keine anderen Wurzeln. Denn wenn (1) erfüllt ist, so ist auch $x^n - 1 = 0$, also x gleich einer n^{ten} Einheitswurzel. Der Wert $x = 1$ genügt aber der Gleichung (1) nicht.

Setzen wir $x = \varepsilon$, so ergibt sich aus (1)

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = -1, \tag{2}$$

also der Satz, daß die Summe der $n - 1$ von 1 verschiedenen n^{ten} Einheitswurzeln $= -1$ ist.

2. Die Gleichung (1) ist eine Gleichung von besonderer Natur, die sich in manchen Fällen vollständig auflösen läßt, wie wir jetzt in einigen Fällen sehen werden.

Für $n = 3$ lautet die Gleichung (2)

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

oder

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = -1.$$

Dies gibt uns also nach § 95. (3) unmittelbar die Sechseckseite $= 1$, d. h. gleich dem Radius.

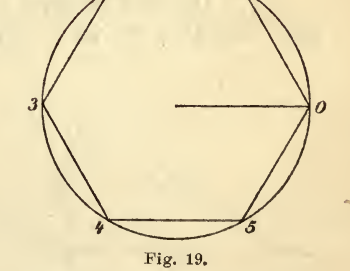


Fig. 19.

Es ist also

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und folglich

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^{-1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Für $n = 5$ ergibt

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

nach § 95. (3) die Zehneckseite. Aus (2) aber folgt für diesen Fall

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

oder da $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$ ist:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1.$$

Es ist aber $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 - 2 = y^2 - 2$, und daher erhält man für die Zehneckseite:

$$y^2 = 1 - y, \quad y : 1 = (1 - y) : y, \tag{3}$$

und die zweite Form dieser Gleichung zeigt, daß man y als den größeren der beiden Teile erhält, die sich ergeben, wenn man die Längeneinheit, d. h. den Radius, nach dem goldenen Schnitt teilt (§ 31, 6.). Die algebraische Auflösung von (3) ergibt

$$(4)\qquad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Die zweite Wurzel ist

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Daß hier $\sqrt{5}$ positiv zu nehmen ist, folgt daraus, daß der Winkel $2\pi/5$ im ersten Quadranten liegt, also einen positiven Kosinus hat. Um die Bedeutung der zweiten Wurzel y_1 zu erhalten, beachte man:

$$2\cos\frac{4\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{10}$$

und es ist also $-y_1$ die Seite eines überschlagenen Zehnecks, das man erhält, wenn man in dem einfachen Zehneck immer zwei Eckpunkte überspringt. Dieses Zehneck führt durch abermaliges Überspringen von je einer Ecke auf das sternförmige Fünfeck.

Aus (4) ergibt sich

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

und folglich

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

4. Um die Größen y und $-y_1$ zu konstruieren, beachte man, daß $5 = 1^2 + 2^2$ ist. Wenn man also ein rechtwinkliges Dreieck ABC zeichnet, das die beiden Katheten 1 und $\frac{1}{2}$ hat, so ist die Hypotenuse dieses Dreiecks $= \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Wenn wir hiervon wieder die Strecke $\frac{1}{2}$ abschneiden, so bleibt y, und wenn wir $\frac{1}{2}$ zufügen, so ergibt sich $-y_1$. In der Figur ist also die Strecke $AM = y$ und $AN = -y_1$.

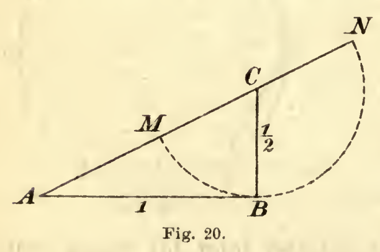


Fig. 20.

5. Eine schöne Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks, die gleichzeitig alle Eckpunkte gibt, hat v. Staudt angegeben. Diese Konstruktion ist in Fig. 21 dargestellt:

Man ziehe in einem Kreis zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AB und CD und ziehe in den Punkten A, C, D die Tangenten, d. h. die Senkrechten, auf den beiden Durchmessern.

Nun mache man die Strecke Cc doppelt so groß wie den Durch-

messer, also, wenn der Radius = 1 ist, $Cc = 4$, und ziehe die Verbindungslinie cS. Diese schneidet den Kreis in zwei Punkten N und N_1. Dann ziehe man die Verbindungslinien CN und CN_1, die den Durchmesser AB in n und n_1 treffen. Wenn man in diesen Punkten Perpendikel auf AB errichtet, so schneiden diese den Kreis in vier Punkten P, P_1, P_2, P_3, die mit A zusammen die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden.

Beweis:

Das Dreieck SNQ ist ähnlich cNC (Gleichheit entsprechender Winkel). Daraus folgt

$$SQ : Cc = NQ : NC$$

und nach dem Satz über die Kreispotenz ist

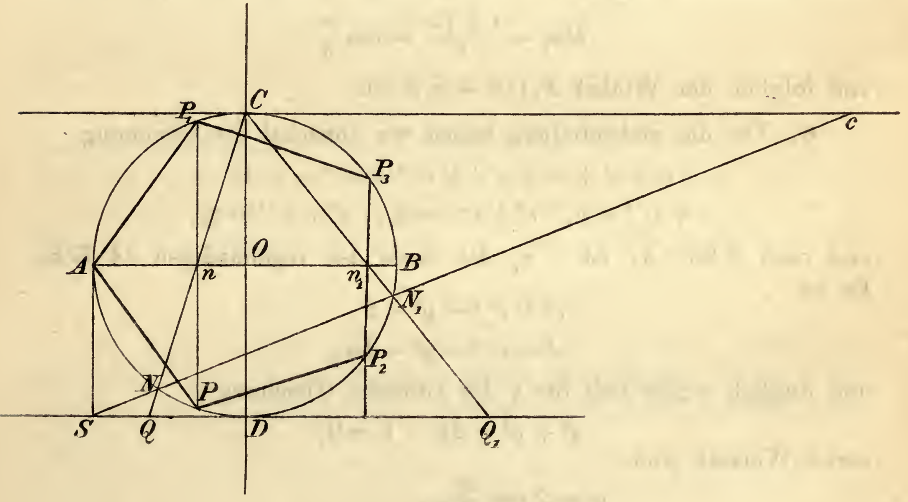


Fig. 21.

$$QD^2 = NQ \cdot QC,$$

woraus

$$SQ : Cc = QD^2 : NC \, . \, QC$$

oder

$$SQ : QD = Cc \, . \, QD : NC \, . \, QC.$$

Die (in der Figur nicht gezeichnete) Sehne DN ist aber senkrecht auf QC, und demnach folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck QDC:

$$DC^2 = NC \, . \, QC$$

und somit

$$SQ : QD = QD \, . \, Cc : DC^2.$$

Es ist aber nach der Konstruktion $Cc = 2DC = 4SD$ und daher

$$DC : Cc = SD : DC$$

und mithin

$$SQ : QD = QD : SD.$$

Es ist also die Strecke SD in Q nach dem goldenen Schnitt geteilt, und folglich, wenn $SD = 1$ ist,

$$QD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

und da $QD = 2\,On$ ist (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CQD und CnO):

$$On = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

Mithin ist der Winkel AOP_1 gleich $2\pi/5$ und AP_1 die Fünfeckseite. Ganz ebenso schließt man, indem man von den beiden ähnlichen Dreiecken SQ_1N_1 und cCN_1 ausgeht, daß

$$On_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5}$$

und folglich der Winkel $P_3OB = \pi/5$ ist.

6. Für die Siebenteilung haben wir zunächst die Gleichung

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y_2,$$

und nach § 95, (3) ist $-y_1$ die Seite des regelmäßigen 14-Ecks. Es ist

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y,$$

und folglich ergibt sich für y die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}.$$

Diese Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, von denen die dem absoluten Werte nach größte und kleinste negativ sind, während die mittlere positiv ist. Weil wir hier auf eine kubische Gleichung gestoßen sind, ist das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

7. Eine etwas andere Behandlung erfordert das Neuneck, weil 9 keine Primzahl ist, und weil daher jede dritte Einheitswurzel zugleich neunte Einheitswurzel ist.

Wenn ε eine neunte Einheitswurzel ist, so ist ε^3 eine dritte Einheitswurzel, und wenn also diese dritte Einheitswurzel nicht $= 1$, also ε nicht selbst eine dritte Einheitswurzel ist, so ist nach Nr. 2

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0,$$

und diese Gleichung bleibt richtig, wenn ε durch ε^2, ε^4, ε^5, ε^7, ε^8 ersetzt wird. Wir haben also eine Gleichung 6ten Grades mit 6 Wurzeln. Es ist aber $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1$ und wenn wir also

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$
$$y^3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 3y$$

setzen, so ergibt sich für y die kubische Gleichung:

$$y^3 - 3y + 1 = 0,$$

deren drei Wurzeln

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$
$$y_3 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9}$$

sind; zwei sind positiv, eine ist negativ, und nach § 95, (3) ist y_1 die Seite des regelmäßigen 18-Ecks. Das Neuneck kann daher auch nicht geometrisch konstruiert werden, und noch schlimmer steht es mit dem 11-Eck, was uns für $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ auf die Gleichung 5ten Grades führt:

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

8. Das 13-Eck gibt eine kubische und eine quadratische Gleichung. Zu diesem Resultat führt das folgende Prinzip, das auch in höheren Fällen noch anwendbar ist. Die 13ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \quad \varepsilon^5, \quad \varepsilon^6,$$
$$\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-4}, \varepsilon^{-5}, \varepsilon^{-6}$$

lassen sich in der Weise in einen Cyklus ordnen, daß jede aus der vorangehenden auf die gleiche Weise, nämlich durch Quadrieren entsteht:

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^{-5}, \varepsilon^3, \varepsilon^6, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-4}, \varepsilon^5, \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-6},$$

und die letzte, ε^{-6}, gibt durch Quadrieren wieder die erste $\varepsilon^{-12} = \varepsilon$. Wenn man nun in diesem Cyklus jedesmal ein Glied überspringt, so zerfällt er in zwei Cyklen, bei denen jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Erhebung zur 4ten Potenz entsteht. Wir bilden die Summen dieser Glieder:

$$\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} = \eta,$$
$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-6} = \eta_1,$$

und schreiben noch kürzer

$$\eta = \Sigma \varepsilon^{\alpha}, \quad \eta_1 = \Sigma \varepsilon^{\beta},$$
$$\alpha \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4, \quad \beta \equiv \pm 2, \pm 5, \pm 6$$

und machen noch die wichtige Bemerkung, daß, wenn a eine der Zahlen α ist, die Zahlen $a\alpha$, abgesehen von Vielfachen von 13, mit den α und die Zahlen $a\beta$ mit den β in ihrer Gesamtheit übereinstimmen, daß dagegen, wenn b eine der Zahlen β ist, die $b\alpha$ mit den β, die $b\beta$ mit den α übereinstimmen.

Dieser Satz, der eine Folge allgemeiner Prinzipien ist, läßt sich hier leicht durch Ausprobieren bestätigen.

Wir nennen die beiden Summen η, η_1 die ersten Perioden. Diese können durch eine Quadratwurzel dargestellt werden, wenn wir ihre Summe $\eta + \eta_1$ und ihr Produkt $\eta\eta_1$ kennen. Es ist aber $\eta + \eta_1$ gleich der Summe aller ε^k, also $= -1$. Das Produkt stellt sich in der Form dar:

$$\eta\eta_1 = \Sigma \varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Der Exponent $\alpha + \beta$ ist, wie man sieht, niemals $= 0$, und nie durch 13 teilbar, und folglich kommt in der Summe $\eta\eta_1$, die im ganzen 36 Glieder enthält, der Summand 1 nicht vor.

Es ist aber entweder durch direkte Rechnung, oder durch die folgende einfache Betrachtung leicht zu sehen, daß jeder Summand ε^k gleich oft, also dreimal vorkommt. Denn ist

$$k \equiv \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \equiv \alpha'' + \beta'' \pmod{13},$$

so ist für eine beliebige durch 13 nicht teilbare Zahl n

$$nk \equiv n\alpha + n\beta \equiv n\alpha' + n\beta' \equiv n\alpha'' + n\beta'',$$

und diese drei Summen sind, da $n\alpha$ und $n\beta$ niemals beide unter den α oder beide unter den β vorkommen können, unter den $\alpha + \beta$ enthalten. Es kommt also jedes nk mindestens dreimal vor und da es im ganzen nur 36 Glieder sind, so muß jeder Summand ε^k gerade dreimal darunter vorkommen. Es ist also $\eta\eta_1 = 3\Sigma\varepsilon^k = -3$, und wir haben η und η_1 aus

$$\eta + \eta_1 = -1,$$
$$\eta\eta_1 = -3,$$

zu bestimmen. Wenn man die erste dieser Gleichungen zum Quadrat erhebt und das Vierfache der zweiten davon subtrahiert, so folgt

$$(\eta + \eta_1)^2 - 4\eta\eta_1 = (\eta - \eta_1)^2 = 13$$

und folglich

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Daß das Vorzeichen von $\sqrt{13}$ so gewählt werden muß, ergibt sich aus der Darstellung

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13},$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} - 2\cos\frac{5\pi}{13},$$

$$\eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13};$$

da die Kosinus der Winkel im ersten Quadranten positiv sind, und der kleinere Winkel einen größeren Kosinus hat, so sieht man hieraus unmittelbar, daß η_1 negativ und folglich $\eta = -1/\eta_1$ positiv ist.

9. Nachdem man η und η_1 gefunden hat, erhält man für y eine kubische Gleichung. Man setze nämlich

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}, \quad y_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3},$$

woraus sich durch einfache Rechnung ergibt:

$$y + y_1 + y_2 = \eta,$$

$$yy_1 + yy_2 + y_1y_2 = \Sigma\,\varepsilon^k = -1,$$

$$yy_1y_2 = 2 + \eta_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2},$$

und demnach sind y, y_1, y_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 - \eta y^2 - y + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei positive und eine negative Wurzel, nämlich

$$2\cos\frac{2\pi}{13}, \quad -2\cos\frac{5\pi}{13}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{13},$$

von denen die kleinste positive $2\cos\frac{6\pi}{13}$ die Seite des 26-Ecks gibt.

10. Man kann auch zuerst eine rationale Gleichung dritten Grades bilden, wenn man

$$z = \varepsilon + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{2\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13},$$

$$z_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = 2\cos\frac{4\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13},$$

$$z_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6} = -2\cos\frac{5\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}$$

setzt. Man findet durch Rechnung

$$zz_1 = -1 + z_1, \quad z_1 z_2 = -1 + z_2, \quad zz_2 = -1 + z,$$
$$z + z_1 + z_2 = -1,$$
$$zz_1 + zz_2 + z_1 z_2 = -4,$$
$$zz_1 z_2 = -z_2 + z_1 z_2 = -1,$$

und folglich die kubische Gleichung:

$$z^3 + z^2 - 4z + 1 = 0.$$

§ 97. Das regelmäßige Siebenzehneck.

1. Gauß hat das Gebiet der Elementargeometrie durch die schöne Entdeckung bereichert, daß das regelmäßige Siebenzehneck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann[1]).

Wenn man die 17ten Einheitswurzeln ε^k in der Weise in eine Reihe zu ordnen versucht, daß jedes folgende Glied das Quadrat des vorausgehenden ist, so findet man, daß man auf diese Weise nicht alle diese Wurzeln erhält, sondern nur acht von ihnen:

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-4}, \varepsilon^{-8},$$

und hierauf würde wieder $\varepsilon^{-16} = \varepsilon$ folgen.

Um alle ε^k zu erhalten, müssen wir noch eine zweite ähnliche Reihe ansetzen, die etwa mit ε^3 anfängt. Wir setzen nun

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta,$$
$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1.$$

Es ist dann $\eta + \eta_1 = -1$, und für das Produkt $\eta\eta_1$ erhält man

$$\eta\eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta},$$

worin α die erste, β die zweite Reihe der Exponenten durchläuft. Die Summe enthält 64 Glieder, und man schließt, genau wie bei dem Dreizehneck, daß jedes ε^k gleich oft, nämlich viermal darunter vorkommt. Mithin ist

$$\eta\eta_1 = -4, \quad \eta + \eta_1 = -1,$$

woraus man $\eta - \eta_1 = \sqrt{17}$ und folglich

1) Disq. arithmeticae, Sectio septima. Wie von Archimedes berichtet wird, er habe bestimmt, daß sein Grabmal die Kugel mit dem Zylinder zeigen solle, so hat Gauß geäußert, er wünsche auf seinem Grabmal die Figur des Siebzehnecks verewigt. Diese kleine Erzählung zeigt, welchen Wert Gauß selbst auf diese Entdeckung legte. Auf dem Grabstein ist diesem Wunsch nicht entsprochen, wohl aber steht bei dem Denkmal, was Gauß in Braunschweig errichtet ist, die Statue (freilich dem Beschauer kaum sichtbar) auf einem Siebzehneck.

$$\eta = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

findet. Daß das Vorzeichen von $\sqrt{17}$ in diesen Formeln positiv zu nehmen ist, sieht man, wenn man η_1 in die Form setzt:

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17},$$

was offenbar negativ ist. Folglich ist η positiv.

2. Um η und η_1 zu konstruieren, benutzt man wieder die Eigenschaft der Zahl 17, die Summe zweier Quadrate, $4^2 + 1^2$ zu sein. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 2 und $\frac{1}{2}$, dessen Hypotonuse dann $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ ist. Schneidet man auf diesem die Strecke $\frac{1}{2}$ ab oder fügt sie hinzu, so erhält man η und $-\eta_1$ ($AC = \eta$, $AC' = -\eta_1$). Die Summen η, η_1 heißen die **ersten Perioden**. Aus ihnen kann man vier zweite Perioden bilden, wenn man jedesmal ein Glied überspringt, also

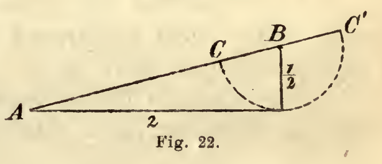


Fig. 22.

$$z = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$z_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2\cos\frac{4\pi}{17} - 2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$z_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$z_3 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}.$$

Man erhält hieraus durch direktes Addieren und Multiplizieren:

$$z + z_1 = \eta, \quad zz_1 = -1$$

$$z_2 + z_3 = \eta_1, \quad z_2 z_3 = -1,$$

woraus

$$z = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2+4}}{2}, \quad z_1 = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2+4}}{2}$$

$$z_2 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2+4}}{2}, \quad z_3 = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2+4}}{2}.$$

Daß die Vorzeichen hier positiv zu nehmen sind, zeigt die Darstellung durch die Kosinus, wonach z_1 und z_3 negativ, z und z_2 positiv sind.

Um z und z_1 zu konstruieren, nimmt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 und $\frac{1}{2}\eta$, dessen Hypotenuse dann $\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4}$

ist; wenn man $\frac{1}{2}\eta$ zu dieser Hypotenuse zufügt oder von ihr wegnimmt, so erhält man z und $-z_1$, und auf gleiche Weise kann man z_2 und z_3 aus η_1 konstruieren.

Endlich sei

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{17},$$

$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2 \cos \frac{8\pi}{17},$$

also

$$y + y_1 = z, \quad y y_1 = z_2,$$

woraus

$$y = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4z_2}}{2}, \quad y_1 = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4z_2}}{2},$$

was wieder leicht konstruiert werden kann. Die Seite des einfachen regelmäßigen 34-Ecks ist y_1.

Eine elegante Konstruktion des Siebzehnecks, ganz entsprechend der des Fünfecks, hat v. Staudt gegeben (Crelles Journal, Bd. 24).

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

§ 98. Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

1. Es gibt eine Reihe von altersher berühmter geometrischer Probleme, von denen bekannt war oder angenommen wurde, daß sie nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden können. Hierhin gehört vor allem die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung eines Würfels, die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, die Quadratur des Kreises.

Die geometrische Konstruierbarkeit ist mit der algebraischen Tatsache gleichbedeutend, daß die gesuchte Größe aus den gegebenen durch eine Reihe von Quadratwurzeln ableitbar sei (§ 95, 7.).

Einfacher läßt sich dies ausdrücken, wenn wir uns auf den in § 63, 7. eingeführten Begriff des Rationalitätsbereiches und seiner Erweiterung durch Adjunktion stützen. Es war unter einem Rationalitätsbereich ein Zahlengebiet verstanden, in dem die rationalen Rechenoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit Ausnahme der Division durch Null) unbeschränkt ausführbar sind, ohne auf Zahlen zu führen, die nicht in dem Gebiete enthalten sind. Unter Adjunktion haben wir die Hinzufügung einer neuen Zahl verstanden, wodurch ein erweiterter Rationalitätsbereich entsteht, der den ursprünglichen als Teil enthält. So entsteht z. B. durch Adjunktion von $i = \sqrt{-1}$ zu dem Bereich der rationalen Zahlen der Bereich der komplexen Zahlen $x + iy$, worin x und y rationale Zahlen sind.

Hiernach können wir die charakteristische Eigenschaft der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen, die wir von jetzt ab auch kurz als konstruierbare Größen bezeichnen wollen, so ausdrücken:

> Jede konstruierbare Größe x muß in einem Rationalitätsbereich enthalten sein, der aus dem der gegebenen Größen durch successive Adjunktion einer Reihe von Quadratwurzeln abgeleitet ist.

Die Reihenfolge, in der diese Quadratwurzeln adjungiert werden, kann möglicherweise auf verschiedene Arten vorgenommen werden. Dies ist z. B. der Fall, wenn es sich um eine Summe $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ handelt, wo es gleichgültig ist, welche der beiden Wurzeln zuerst ausgezogen wird; dagegen ist in einem Ausdruck wie $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{\gamma}}$ zuerst $\sqrt{\gamma}$ zu suchen und dann kann erst $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{\gamma}}$ gefunden werden.

Wir denken uns eine dieser Reihenfolgen festgesetzt und bezeichnen die letzte Quadratwurzel, die zu adjungieren ist, mit $\sqrt{\theta}$. Der Rationalitätsbereich, in dem $\sqrt{\theta}$ noch nicht enthalten ist, heiße der vorletzte Rationalitätsbereich.

Es ist dann $\sqrt{\theta}$ nicht in dem vorletzten Rationalitätsbereich enthalten, dagegen sind alle geraden Potenzen von $\sqrt{\theta}$ darin enthalten, und folglich kann jede konstruierbare Größe x in der Form dargestellt werden:

$$x = \frac{a + b\sqrt{\theta}}{c + d\sqrt{\theta}},$$

worin a, b, c, d Größen des vorletzten Rationalitätsbereiches sind. Erweitert man diesen Bruch mit $c - d\sqrt{\theta}$, so ergibt sich

$$x = \frac{(a + b\sqrt{\theta})(c - d\sqrt{\theta})}{c^2 - d^2\theta},$$

und wenn man

$$y = \frac{ac + bd\theta}{c^2 - d^2\theta}, \quad z = \frac{bc - ad}{c^2 - d^2\theta}$$

setzt, so folgt

$$x = y + z\sqrt{\theta},$$

worin y, z im vorletzten Rationalitätsbereich enthalten sind. Der Nenner $c^2 - d^2\theta$ kann nicht verschwinden, da θ nicht das Quadrat einer Größe des vorletzten Rationalitätsbereiches sein soll.

2. Hiernach ist x die Wurzel einer quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2yx + (y^2 - \theta z^2) = 0,$$

die wir auch durch

$$f(x) = 0$$

bezeichnen, deren Koeffizienten im vorletzten Rationalitätsbereiche enthalten sind. Ist also $\sqrt{\theta_1}$ die vorletzte der zu adjungierenden Quadratwurzeln, so können wir die Gleichung $f(x) = 0$ auch so darstellen:

$$f(x) = \varphi(x) + \sqrt{\theta_1}\,\psi(x) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\varphi - \sqrt{\theta_1}\,\psi$, so erhalten wir eine Gleichung vierten Grades

$$f_1(x) = \varphi(x)^2 - \theta_1 \psi(x)^2 = 0,$$

in der auch die vorletzte Quadratwurzel $\sqrt{\theta_1}$ nicht mehr vorkommt, und die in die Form

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{\theta_2}\psi_1(x) = 0$$

gesetzt werden kann, in der $\sqrt{\theta_2}$ die vor-vorletzte Quadratwurzel ist. Hieraus kann wieder die Gleichung 8ten Grades

$$f_2(x) = \varphi_1(x)^2 - \theta_2\psi_1(x)^2 = 0$$

abgeleitet werden, und so können wir fortfahren, bis alle adjungierten Quadratwurzeln herausgeschafft sind. So kommen wir zu dem Satze:

Jede konstruierbare Größe x ist die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rational in den gegebenen Größen sind.

Natürlich ist dieser Satz nicht umkehrbar; denn nicht jede algebraische Gleichung läßt sich durch eine Kette von Quadratwurzeln lösen.

§ 99. Eine kubische Gleichung ist nicht durch Quadratwurzeln lösbar.

Wir können, wie schon früher (§ 82, 3.) gezeigt, eine kubische Gleichung ohne Anwendung von Wurzeln auf die vereinfachte Form bringen:

$$x^3 + ax = b, \tag{1}$$

und es seien jetzt a und b gegebene rationale Zahlen. Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln dieser Gleichung, so ist (§ 64, 1.)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{2}$$

Es möge nun eine dieser Wurzeln, etwa x_1, durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmbar sein. Dann ist, wenn wir mit $\sqrt{\theta}$ die letzte Quadratwurzel bezeichnen, nach dem vorigen Paragraphen

$$x_1 = y + z\sqrt{\theta}, \tag{3}$$

worin y, z, θ dem vorletzten Rationalitätsbereiche angehören. Dagegen können wir annehmen, daß die $\sqrt{\theta}$ nicht dem vorletzten Rationalitätsbereiche angehöre und daß z von Null verschieden sei.

Setzen wir den Ausdruck (3) in (1) ein, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$A + B\sqrt{\theta} = 0,$$

worin

$$A = y^3 + 3yz^2\theta + ay - b,$$
$$B = 3y^2z + z^3\theta + az,$$

rational durch die früheren Quadratwurzeln dargestellt sind. Da aber $\sqrt{\theta}$ durch diese nicht darstellbar sein soll, so muß $A = 0$ und $B = 0$ sein, und es folgt also daraus, daß auch

$$x_2 = y - z\sqrt{\theta}$$

eine Wurzel von (1) ist, die, da z nicht Null ist, von der Wurzel x_1 verschieden ist. Aus (2) ergibt sich aber dann

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2y.$$

Es hängt also x_3 nur von den früheren Quadratwurzeln ab.

Ist nun x_3 nicht eine rationale Zahl, so muß noch eine der $\sqrt{\theta}$ vorangehende $\sqrt{\theta_1}$ vorhanden sein, und es ist

$$x_3 = y_1 + z_1\sqrt{\theta_1}.$$

Ebenso wie vorhin schließt man jetzt, daß eine der beiden andern Wurzeln, etwa x_1 gleich $-2y_1$, also von $\sqrt{\theta}$ (und von $\sqrt{\theta_1}$) unabhängig sein muß, was wegen (3) unserer Annahme widerspricht, daß $\sqrt{\theta}$ nicht durch die früheren Quadratwurzeln ausdrückbar sei. Wir haben also damit den Satz:

Eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist niemals durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar.

2. Dieser Satz ist unmittelbar anwendbar auf die Würfelverdoppelung, die von der Gleichung $x^3 = 2$ abhängt, ebenso auf die Probleme des regelmäßigen Siebenecks und Neunecks. Denn die Gleichungen, von denen diese Probleme abhängen, sind nach § 96, 6. 7.

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0,$$

und nach dem Satze § 63, 1. könnten diese Gleichungen nur die rationalen Wurzeln $+1$ oder -1 haben, und diese beiden Werte genügen nicht.

3. Die Trisektion des Winkels hängt von der Gleichung ab:

$$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta. \quad (\S\ 82,\ 1.) \tag{4}$$

Ist $\cos\vartheta$ gegeben, so kann der Winkel ϑ konstruiert werden. Setzen wir $2\cos\vartheta = a$, so lautet diese Gleichung

$$x^3 - 3x = a, \tag{5}$$

und die Aufgabe kann so gefaßt werden, daß aus zwei beliebig gegebenen Strecken, von denen die eine die Längeneinheit, die andere a ist, die Strecke x konstruiert werden soll. Für unendlich viele besondere Werte von a ist diese Aufgabe lösbar, z. B. für $a = 0$ (Dreiteilung

des rechten Winkels) oder für $a = \sqrt{2}$ (Dreiteilung des Winkels von 45^0) oder $a = 2 \cos \frac{3\pi}{17}$. Man braucht, um andere konstruierbare Fälle zu finden, nur irgend eine aus der Einheit durch Konstruktion ableitbare Strecke α zu nehmen und $a = \alpha^3 - 3\alpha$ zu setzen. Dann ist $x = \alpha$ eine Wurzel unserer Gleichung.

Lassen wir aber a unbestimmt, so kann die Gleichung (5), wie oben bewiesen ist, nur dann durch Quadratwurzeln lösbar sein, wenn sie eine Wurzel hat, die rational durch a ausdrückbar ist.

Daß dies im allgemeinen unmöglich ist, schließt man daraus, daß man unendlich viele rationale Werte von a angeben kann, für die diese Gleichung keine rationale Wurzel hat. Ein solcher Wert ist z. B. $a = -1$, für den $\vartheta = \pi/3$ und $x = 2 \cos \pi/9$ ist. Diese Annahme führt also auf das reguläre Neuneck, das, wie wir gesehen haben, nicht konstruierbar ist.

Um andere Fälle dieser Art zu finden, setze man

$$\cos \vartheta = m/n, \quad nx = y,$$

worin m, n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Dann wird die Gleichung (4):

$$y^3 - 3n^2y = 2mn^2, \tag{6}$$

und wenn (4) eine rationale Lösung hat, so muß (6) eine ganzzahlige Lösung haben. Dies ist aber z. B. unmöglich, wenn n durch eine ungerade Primzahl p, aber nicht durch deren Quadrat teilbar ist, weil dann y durch p und folglich die linke Seite von (6) durch p^3, die rechte nur durch p^2 teilbar wäre.

§ 100. Reduktion einer Funktion durch ein Radikal. Der casus irreducibilis der kubischen Gleichung.

1. Um weitere Anwendungen auf die Algebra zu machen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Ist n eine Primzahl und a eine Zahl des Rationalitätsbereiches, die nicht die n^{te} Potenz einer anderen Zahl des Rationalitätsbereiches ist, so ist

$$\varphi(x) = x^n - a$$

irreduzibel.

Für $n = 2$ ist dieser Satz einleuchtend, denn für $n = 2$ wird $\varphi(x) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$, und diese Faktoren sind nur dann rational, wenn $\sqrt{a}$ rational ist.

Versteht man für ein ungerades n unter $\sqrt[n]{a} = r$ eine bestimmte der verschiedenen n^{ten} Wurzeln, z. B. wenn a reell ist, die reelle,

unter ε die n^{te} Einheitswurzel $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$, so sind die sämtlichen n^{ten} Wurzeln aus a:

(1) $$r,\ \varepsilon r,\ \varepsilon^2 r, \ldots \varepsilon^{n-1} r.$$

Wenn nun $\varphi(x)$ zerfällt, etwa in das Produkt $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, worin der Grad von $\varphi_1(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_\mu$ kleiner als n ist, so werden die Wurzeln von $\varphi_1(x)$ unter denen von $\varphi(x)$ zu suchen sein, und da $b = (-1)^\mu b_\mu$, gleich dem Produkte der Wurzeln von $\varphi_1(x)$ ist (§ 64), so ist
$$b = \varepsilon^k r^\mu, \quad a = r^n,$$
worin k eine ganze Zahl ist, und b dem Rationalitätsbereich angehört. Erhebt man die erste dieser Gleichungen in die n^{te} Potenz, so folgt nach der zweiten:

(2) $$b^n = a^\mu.$$

Da nun aber μ kleiner als die Primzahl n und folglich μ, n relativ prim sind, so kann man die ganzen Zahlen p, q so bestimmen, daß $pn + q\mu = 1$ wird (§ 70). Es ist dann wegen (2)
$$a = a^{pn} a^{q\mu} = (a^p b^q)^n,$$
folglich a die n^{te} Potenz einer Zahl des Rationalitätsbereiches, wie bewiesen werden sollte.

2. Wenn $\chi(x)$ und $\psi(x)$ ganze Funktionen von x mit Koeffizienten des Rationalitätsbereichs bedeuten, und $r = \sqrt[n]{a}$, so ist $\chi(r)$ nur dann $= 0$, wenn $\chi(x)$ durch $\varphi(x) = x^n - a$ teilbar ist. Ist $\chi(x)$ relativ prim zu $\varphi(x)$, so können wir nach § 62, 3. die beiden Funktionen $F(x)$ und $F_1(x)$ so bestimmen, daß
$$F(x)\chi(x) + F_1(x)\varphi(x) = \psi(x),$$
und folglich, wenn wir $x = r$, also $\varphi(r) = 0$ setzen und $\chi(r)$ von Null verschieden annehmen,
$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)} = F(r).$$

In dieser Form ist also jede Zahl enthalten, die durch die vier Spezies aus r und aus Zahlen des Rationalitätsbereiches abgeleitet werden kann. Da man überdies die höheren Potenzen von r vermöge $r^n = a$ durch die niedrigeren ausdrücken kann, so folgt, daß jede Zahl ω des durch Adjunktion von r erweiterten Rationalitätsbereichs in der Form
$$\omega = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_{n-1} r^{n-1}$$
dargestellt werden kann, worin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören.

3. Wir wollen die Wurzeln von $\varphi(x)$, also die Größen (1) mit

$$r, r_1, r_2, \dots r_{n-1}$$

bezeichnen. Es ergibt sich dann aus den Newtonschen Formeln für die Potenzsummen (§ 65, (6)), da hier die Koeffizienten

$$a_1, a_2, \dots a_{n-1}$$

gleich Null sind,

$$(3) \qquad r^\nu + r_1^\nu + r_2^\nu + \cdots + r_{n-1}^\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, \cdots n-1).$$

Wenn wir r in ω durch $r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ ersetzen, so erhalten wir n Zahlen

$$(4) \qquad \omega, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_{n-1},$$

die wir konjugierte Zahlen nennen. Die Summe dieser Zahlen ist nach (3)

$$S(\omega) = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = n\alpha_0,$$

und ist also eine rationale Größe. Sie heißt die Spur der Zahl ω. Da aber ω^ν für jedes ganzzahlige ν selbst wieder eine Zahl von der Form ω ist, so folgt, daß auch

$$S(\omega^\nu) = \omega^\nu + \omega_1^\nu + \cdots + \omega_{n-1}^\nu$$

eine rationale Größe ist.

Daraus schließen wir aber wieder, daß alle Koeffizienten A_i des Produktes

$$F(x) = (x - \omega)(x - \omega_1) \cdots (x - \omega_{n-1})$$
$$= x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

die sich ja nach den Newtonschen Formeln rational durch die $S(\omega^\nu)$ ausdrücken lassen, Zahlen des Rationalitätsbereiches sind. Insbesondere ist das Produkt

$$N(\omega) = \omega\omega_1\omega_2 \cdots \omega_{n-1},$$

das die Norm von ω genannt wird, im Rationalitätsbereich enthalten.

4. Ist in einem besondern Fall

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-1},$$

so ist $S(\omega) = n\omega = n\alpha_0$, also ω selbst im Rationalitätsbereich enthalten.

Es ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ω selbst im Rationalitätsbereich enthalten ist, die, daß die konjugierten Werte von ω alle einander gleich sind.

Diese Sätze sind übrigens spezielle Fälle des allgemeinen Satzes von den symmetrischen Funktionen.

5. Endlich sei hier an den Satz erinnert, der nach § 63, 7. aus der vorausgesetzten Irreduzibilität von $\varphi(x) = x^n - a$ folgt, daß, wenn irgend eine Gleichung $F(r) = 0$, mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, richtig ist, auch

$$F(r_1) = 0, \quad F(r_2) = 0, \cdots F(r_{n-1}) = 0$$

sein muß.

6. Wir nehmen nun an, es sei irgend eine ganze Funktion $f(x)$ irreduzibel im Rationalitätsbereich, sie werde aber reduzibel durch Adjunktion einer Wurzel r von $\varphi(x)$. Die Grade m und n von $f(x)$ und $\varphi(x)$ seien beide Primzahlen. Den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in $f(x)$ nehmen wir $= 1$ an.

Wir deuten die Zerlegung von $f(x)$ in zwei Faktoren des erweiterten Rationalitätsbereiches so an:

$$f(x) = f_1(x, r)\, f_2(x, r),$$

worin $f_1(x, r)$, $f_2(x, r)$ ganze Funktionen der Grade m_1, m_2 sind, deren Koeffizienten rational von r abhängen, also Zahlen der Form ω (Nr. 2.) sind. Auch in f_1 und f_2 seien die Koeffizienten der höchsten Potenz von x gleich 1.

Nach dem Satze 5. ist dann auch

$$f(x) = f_1(x, r_1)\, f_2(x, r_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x) = f_1(x, r_{n-1})\, f_2(x, r_{n-1}),$$

und wenn man alle diese Gleichungen multipliziert und

$$F_1(x) = f_1(x, r)\, f_1(x, r_1) \cdots f_1(x, r_{n-1}) = N f_1(x, r),$$
$$F_2(x) = f_2(x, r)\, f_2(x, r_1) \cdots f_2(x, r_{n-1}) = N f_2(x, r)$$

setzt,

$$f(x)^n = F_1(x)\, F_2(x); \tag{3}$$

darin sind $F_1(x)$, $F_2(x)$ ganze Funktionen der Grade nm_1, nm_2, deren Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Wurzeln von $\varphi(x)$ im Rationalitätsbereich enthalten sind.

Da nun $f(x)$ irreduzibel angenommen war, so muß nach (3) sowohl $F_1(x)$ als $F_2(x)$ eine Potenz von $f(x)$ sein. Sei also

$$F_1(x) = f(x)^{p_1}, \quad F_2(x) = f(x)^{p_2},$$

und folglich, durch Vergleichung der Grade:

$$mp_1 = nm_1, \quad mp_2 = nm_2, \quad m_1 + m_2 = m.$$

Da nun m_1 und m_2 kleiner als m und folglich nicht durch m teilbar sind, so muß n durch m teilbar, und da beides Primzahlen sind, $n = m$ sein. Hieraus folgt der Satz:

Eine irreduzible Funktion $f(x)$ vom Primzahlgrad m kann nur dann durch Adjunktion eines Radikals, dessen Wurzelexponent ebenfalls eine Primzahl ist, reduzibel werden, wenn der Wurzelexponent $= m$ ist.

7. Hiernach können wir leicht den Satz beweisen:

Eine irreduzible Gleichung dritten Grades mit drei reellen Wurzeln und rationalen Koeffizienten kann nicht durch reelle Radikale gelöst werden.

Wenn eine irreduzible Gleichung, deren Koeffizienten wir rational annehmen, eine Wurzel hat, die durch eine Kette von reellen Radikalen darstellbar ist, so können wir die aufeinander folgenden Wurzelexponenten als Primzahlen annehmen. Denn eine Wurzel mit zusammengesetzten Exponenten $r = \sqrt[m]{\theta}$ kann, wenn $m = pq$ ist, ersetzt werden durch $r = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\theta}}$, also durch mehrmals nacheinander ausgeführtes Radizieren mit Primzahlexponenten. Wir fügen dann der Reihe nach alle diese Radikale bis auf das letzte dem Rationalitätsbereich zu, wodurch die Gleichung noch nicht zerfällt. Erst durch Hinzufügung des letzten Radikals r, das nach 6. vom dritten Grade sein muß, tritt ein Zerfallen ein. Es erhält also eine Wurzel den Ausdruck

$$x_1 = a + br + cr^2,$$

worin a, b, c rational durch die früheren Radikale ausdrückbar sind, während $r = \sqrt[3]{\theta}$ nicht in dieser Weise darstellbar ist. Es folgt hieraus, daß θ nicht die dritte Potenz einer im Rationalitätsbereich enthaltenen Größe α sein kann; denn von den drei Werten $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha$, die dann r haben könnte, wäre nur α reell; also müßte das reelle r gleich α sein, gegen die Voraussetzung. Daraus ergibt sich aber, daß auch

$$x_2 = a + \varepsilon rb + \varepsilon^2 r^2 c,$$

$$x_3 = a + \varepsilon^2 rb + \varepsilon r^2 c$$

Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung sein müssen; denn aus dem Satze Nr. 5. folgt, daß mit $f(x_1)$ zugleich $f(x_2)$ und $f(x_3)$ verschwinden. Nun ist hier

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

und da a, b, c reell sind, so können x_2 und x_3 nur dann reell sein, wenn

$$rb = r^2 c$$

ist. Wären b und c gleich 0, so wäre $x_1 = a$, also $f(x)$ durch $x - a$ teilbar, also gegen die Voraussetzung schon vor Adjunktion von r reduzibel. Daher müßte $r = b/c$, d. h. r rational durch die früheren Radikale ausdrückbar sein, was gleichfalls der Voraussetzung widerspricht.

§ 101. Die Gleichung fünften Grades ist im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar[1]).

1. Es sei jetzt $f(x)$ eine irreduzible Funktion 5ten Grades mit rationalen Koeffizienten, von der wir voraussetzen wollen, daß sie durch eine Kette von Radikalen (die jetzt nicht reell vorausgesetzt zu werden brauchen) reduzibel wird. Wir bilden einen Rationalitätsbereich, indem wir alle nötigen Radikale mit Ausnahme des letzten hinzufügen, sodaß also $f(x)$ auch in diesem Rationalitätsbereich noch irreduzibel ist. Wenn dieser Rationalitätsbereich die fünfte Einheitswurzel ε noch nicht enthält, so fügen wir diese noch hinzu, wodurch abermals keine Zerfällung eintreten kann. Denn nach § 96, 3. ist

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$$

durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellbar, durch die nach § 100 Nr. 6 keine Reduktion der Funktion 5ten Grades $f(x)$ bewirkt werden kann. Die Adjunktion eines möglicherweise überflüssigen Radikals ist ja immer gestattet.

Diese Quadratwurzeln rechnen wir also mit zu den „früheren Radikalen". Das letzte Radikal, durch das die Zerfällung eintritt, sei dann

$$r = \sqrt[5]{\theta}$$

und sei nicht durch die früheren Radikale ausdrückbar. Dann kann θ nicht die fünfte Potenz einer Größe α des Rationalitätsbereiches sein, weil sonst $r = \varepsilon^k \alpha$ ebenfalls im Rationalitätsbereich enthalten wäre.

2. Da hiernach $x^5 - \theta$ irreduzibel ist, so kann man nach § 100, 5. in jeder Gleichung, die r enthält, r durch εr, $\varepsilon^2 r$, $\varepsilon^3 r$, $\varepsilon^4 r$ ersetzen.

Ist also z. B. für irgend eine rationale Funktion ψ

$$\psi(r) = \psi(\varepsilon r),$$

so ist auch

$$\psi(\varepsilon r) = \psi(\varepsilon^2 r) = \psi(\varepsilon^3 r) = \psi(\varepsilon^4 r),$$

und es ist also $\psi(r)$ selbst im Rationalitätsbereich enthalten (§ 100, 4.).

1) Vgl. die Zusätze am Schluß des Bandes.

3. Es werde jetzt $f(x)$ durch Adjunktion von r reduzibel und es sei $f(x, r)$ ein Faktor von $f(x)$, der auch nach Adjunktion von r nicht weiter zerlegbar ist. Der Koeffizient der höchsten Potenz werde immer $= 1$ angenommen.

Wenn aber $f(x, r)$ ein Faktor von $f(x)$ ist, so gehen nach § 100, 5. die fünf Faktoren

$$f(x, r),\ f(x, \varepsilon r),\ f(x, \varepsilon^2 r),\ f(x, \varepsilon^3 r),\ f(x, \varepsilon^4 r) \tag{1}$$

alle in $f(x)$ auf. Diese fünf Faktoren sind alle zugleich mit $f(x, r)$ irreduzibel; und es sind keine zwei mit einander identisch, da sie sonst nach Nr. 2 alle identisch und folglich rational sein müßten, was der Annahme widerspricht, daß $f(x)$ erst nach Adjunktion von r reduzibel werde. Es haben also auch keine zwei der Funktionen (1) einen gemeinschaftlichen Teiler, da ein solcher rational durch r darstellbar und doch in einer der irreduziblen Funktionen (1) enthalten wäre. Das Produkt

$$F(x) = Nf(x, r) = f(x, r)\, f(x, \varepsilon r)\, f(x, \varepsilon^2 r)\, f(x, \varepsilon^3 r)\, f(x, \varepsilon^4 r) \tag{2}$$

ist aber rational und folglich durch $f(x)$ teilbar, und da es keine anderen Faktoren als solche, die auch in $f(x)$ aufgehen, enthalten kann, so ist es eine Potenz von $f(x)$.

Diese Potenz muß aber hier die erste sein, da ein linearer Faktor, der in $F(x)$ mehr als einmal vorkäme, ein gemeinsamer Faktor zweier Funktionen (1) sein müßte. Es ist also

$$f(x) = f(x, r)\, f(x, r_1)\, f(x, r_2)\, f(x, r_3))\, f(x, r_4), \tag{3}$$

und die $f(x, r)$ sind in Bezug auf x vom ersten Grade. Man erhält also die fünf Wurzeln von $f(x)$, wenn man die fünf Faktoren $f(x, r)$ gleich Null setzt, also z. B.

$$x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_4 r^4, \tag{4}$$

worin die α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 Größen des Rationalitätsbereiches sind.

4. Die Funktion 5ten Grades $f(x)$ muß immer mindestens eine reelle Wurzel haben, da die imaginären Wurzeln nur paarweise vorkommen können; es sind daher entweder alle fünf Wurzeln reell, oder es sind zwei imaginär und drei reell, oder es sind vier imaginär und eine reell.

5. Wir wollen uns nun die successive Adjunktion der Radikale in der Weise angeordnet denken, daß wir zu jedem imaginären Radikal ϱ, das noch keine Zerfällung von $f(x)$ bewirkt, gleichzeitig das konjugiert imaginäre ϱ' adjungieren. Das ist offenbar ge-

stattet, da die Adjunktion eines möglicherweise überflüssigen Radikals nicht schadet.

Wenn nach dieser Anordnung $r = \sqrt[5]{\theta}$ das erste zerfällende Radikal ist, so sind nur folgende Fälle möglich:

1) Ist θ reell, so kann auch r reell angenommen werden.

Wenn dann x_1 eine reelle Wurzel von $f(x)$ ist, so sind die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ in (4) gleichfalls reell; denn wären sie komplex und $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4'$ ihre konjugierten Zahlen, die nach unserer Voraussetzung gleichfalls zum Rationalitätsbereich gehören, so wäre auch

$$x_1 = \alpha_0' + \alpha_1' r + \alpha_2' r^2 + \alpha_3' r^3 + \alpha_4' r^4,$$

also

$$(\alpha_0 - \alpha_0') + (\alpha_1 - \alpha_1') r + (\alpha_2 - \alpha_2') r^2 + (\alpha_3 - \alpha_3') r^3 + (\alpha_4 - \alpha_4') r^4 = 0.$$

Dies ist aber, da $x^5 - \theta$ irreduzibel ist, nicht möglich, außer wenn $\alpha_0 - \alpha_0' = 0,\ \alpha_1 - \alpha_1' = 0,\ \alpha_2 - \alpha_2' = 0,\ \alpha_3 - \alpha_3' = 0,\ \alpha_4 - \alpha_4' = 0,$ also die α_i reell sind.

Dann ergeben sich die vier anderen Wurzeln von $f(x)$:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \alpha_0 + \varepsilon\, \alpha_1 r + \varepsilon^2 \alpha_2 r^2 + \varepsilon^3 \alpha_3 r^3 + \varepsilon^4 \alpha_4 r^4,\\
x_3 &= \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 r + \varepsilon^4 \alpha_2 r^2 + \varepsilon\, \alpha_3 r^3 + \varepsilon^3 \alpha_4 r^4,\\
x_4 &= \alpha_0 + \varepsilon^3 \alpha_1 r + \varepsilon\, \alpha_2 r^2 + \varepsilon^4 \alpha_3 r^3 + \varepsilon^2 \alpha_4 r^4,\\
x_5 &= \alpha_0 + \varepsilon^4 \alpha_1 r + \varepsilon^3 \alpha_2 r^2 + \varepsilon^2 \alpha_3 r^3 + \varepsilon\, \alpha_4 r^4,
\end{aligned}$$

die nach Nr. 3 alle voneinander und von x_1 verschieden sind.

Nun sind $\varepsilon, \varepsilon^2$ konjugiert imaginär mit $\varepsilon^4, \varepsilon^3$, und es folgt also, daß x_2 konjugiert imaginär mit x_5 und x_3 konjugiert imaginär mit x_4 ist.

Die Gleichung $f(x)$ hat also in diesem Falle eine reelle und vier paarweise konjugiert imaginäre Wurzeln.

Wenn zweitens θ imaginär ist, und θ' konjugiert mit θ, so sind alle Wurzeln von $x^5 - \theta$ imaginär; zu jedem von ihnen, r, gibt es eine bestimmte konjugierte Zahl r', die eine Wurzel von $x^5 - \theta' = 0$ ist, und es ist

$$rr' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = r_3 r_3' = r_4 r_4' = \sqrt[5]{\theta\theta'} = R \tag{5}$$

reell. Wir wollen nun anstatt r zuerst die reelle Zahl R adjungieren, wenn sie nicht schon im Rationalitätsbereich enthalten ist, und haben nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

2) Es tritt bereits durch Adjunktion von R eine Reduktion von $f(x)$ ein. Dann ist die Adjunktion von r nicht mehr erforderlich, und da R ein reelles Radikal ist, so kommen wir auf den Fall 1) zurück.

3) Es tritt durch Adjunktion von R noch keine Reduktion von $f(x)$ ein, wozu auch der Fall gehört, daß R rational ist (wie z. B. in der Cardanischen Formel bei den kubischen Gleichungen).

Dann ist die Adjunktion von r selbst noch notwendig zur Lösung der Gleichung. Es ist aber mit r auch zugleich schon $r' = R/r$ adjungiert.

Ist dann $x_1 = \psi(r)$ reell, so ist

$$\psi(r) = \psi'(r') = \psi'\left(\frac{R}{r}\right), \tag{6}$$

worin ψ' die Bedeutung hat, daß alle in ψ vorkommenden imaginären Zahlen des Rationalitätsbereiches durch ihre gleichfalls dem Rationalitätsbereich angehörigen konjugiert imaginären Zahlen zu ersetzen sind.

Die Gleichung (6) bleibt aber jetzt bestehen, wenn darin r durch jede der Wurzeln r_1, r_2, r_3, r_4 von $x^5 - \theta$ ersetzt wird, und da nach (5) auch $R/r_1 = r_1', \ldots$ ist, so folgt

$$\psi(r_1) = \psi'(r_1'), \quad \psi(r_2) = \psi'(r_2'), \quad \psi(r_3) = \psi'(r_3'), \quad \psi(r_4) = \psi'(r_4'),$$

d. h. es sind alle fünf Zahlen $\psi(r)$, $\psi(r_1)$, $\psi(r_2)$, $\psi(r_3)$, $\psi(r_4)$ reell. Die fünf Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind also in diesem Falle reell. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

6. Eine irreduzible algebraisch lösbare Gleichung fünften Grades mit reellen Koeffizienten hat entweder fünf reelle Wurzeln oder eine reelle und vier imaginäre Wurzeln, niemals drei reelle und zwei imaginäre Wurzeln[1]).

7. Um also nachzuweisen, daß nicht jede Gleichung fünften Grades durch Radikale gelöst werden kann, haben wir nur zu zeigen, daß es irreduzible Gleichungen fünften Grades mit rationalen Koeffizienten gibt, die drei reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln haben. Dies kann aber durch unzählige leicht zu bildende Beispiele erhärtet werden.

So ist z. B., wie wir schon früher gesehen haben (§ 63, 4.),

$$f(x) = x^5 - 4x - 2$$

irreduzibel. Es kann überdies $f(x)$ nicht lauter reelle Wurzeln haben, denn da die vierte und die dritte Potenz darin nicht vorkommt, so ist (nach den Newtonschen Formeln) nicht nur die Summe der Wurzeln, sondern auch die Summe ihrer Quadrate gleich Null, was

1) Dieser Satz rührt von Kronecker her.

nicht möglich wäre, wenn alle Wurzeln reell wären. Andererseits ist aber

$$f(-2) = -26, \quad f(-1) = +1, \quad f(1) = -5, \quad f(2) = +22.$$

Es ist also $f(x)$ für $x = -2, -1, +1, +2$ abwechselnd negativ und positiv, und muß also, wenn x die Werte von -2 bis $+2$ durchläuft, dreimal durch Null gehen. Folglich hat $f(x)$ drei reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, und ist sonach nicht durch Radikale lösbar. (Im § 93 haben wir für diese Funktion $f(x)$ die reellen sowohl als die imaginären Wurzeln näherungsweise bestimmt.)

8. Anmerkung. Bei diesem Beweise ist es nicht notwendig, den Satz vorauszusetzen, daß jede Gleichung fünften Grades Wurzeln hat. Denn wenn sie überhaupt keine Wurzeln hat, so ist sie auch nicht durch Radikale lösbar, und wenn sie eine Wurzel hat, so hat sie auch fünf; denn ist x_1 die eine Wurzel, so ist $f(x)/(x - x_1) = 0$ eine Gleichung vierten Grades, die ja durch Radikale lösbar ist und vier Wurzeln hat.

9. Der erste vollständige Beweis für die Unmöglichkeit, die Gleichung 5ten Grades allgemein aufzulösen, der den zahlreichen vergeblichen Versuchen und gescheiterten Hoffnungen, eine solche Auflösung zu finden, ein Ende machte, rührt von Abel her und war die erste bedeutende Leistung dieses großen Forschers[1]).

In der berühmten Abhandlung im ersten Band des Journals von Crelle stellt Abel die Frage etwas anders als wir sie hier gefaßt haben. Er fragt, ob man eine algebraische, durch Wurzelzeichen ausgedrückte Funktion x der fünf unbestimmten Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bilden könne, die der Gleichung

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

identisch genügt, und verneint diese Frage.

Damit ist noch nicht entschieden, ob nicht vielleicht für alle ganzzahligen Werte von a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 Zahlen x durch Wurzelziehen aus den rationalen Zahlen abgeleitet werden können, die dieser Gleichung genügen. Diese Frage haben wir hier gleichfalls im verneinenden Sinne beantwortet.

1) Niels Henrik Abel, geb. 1802, gest. 1829 in Norwegen, vollendete in jugendlichem Alter seine kurze glänzende Laufbahn. Sehr lesenswert sind seine hinterlassenen Briefe und die Biographie, die aus Anlaß seines hundertjährigen Geburtstages von Holst, Störmer und Sylow herausgegeben sind (Niels Henrik Abel, Mémorial publié à l'occasion du centennaire de sa naissance, 1902).

DRITTES BUCH.

ANALYSIS.



Zwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

§ 102. Reihen mit positiven Gliedern.

1. Unter einer Zahlenreihe verstehen wir eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Zahlen irgend welcher Art:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

und nennen diese Zahlen auch die Glieder der Reihe. Die Reihe heißt unendlich, wenn das Gesetz so beschaffen ist, daß es ohne Grenzen angewendet werden kann, daß also zu jedem Index ν das entsprechende a_ν berechnet werden kann.

Eine solche unendliche Reihe bilden z. B. die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ und allgemeiner die Glieder einer arithmetischen Progression $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \cdots$ oder die Glieder einer geometrischen Progression $1, a, a^2, a^3, \ldots$ Andere Beispiele sind

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots n^k,$$

worin der Exponent k eine beliebige positive oder negative Zahl sein kann.

Es kommen aber auch Zahlenreihen vor, die nach viel komplizierteren Gesetzen gebildet sind, z. B. die aufeinanderfolgenden Näherungswerte eines unendlichen Dezimalbruches.

2. Wir betrachten zunächst solche unendliche Reihen, deren Glieder positive Zahlen sind. Aus einer solchen Reihe:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

können wir eine zweite Zahlenreihe ableiten, indem wir die Summen der zwei, drei, vier, ... ersten Glieder nehmen. Wenn wir das erste Glied a_1 noch als erstes Glied der neuen Reihe hinzufügen, so erhalten wir die Reihen

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_1 + a_2,$$
$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$A_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

deren n^{tes} Glied

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ist. Die Reihe der A_n ist gleichfalls unendlich; sie hat ebenfalls positive Glieder; sie hat aber noch die besondere Eigentümlichkeit, daß ihre Glieder mit n zugleich wachsen, daß also

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \cdots$$

ist. Denn jedes Glied A_{n+1} entsteht aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung einer positiven Zahl a_{n+1}.

Die Reihe der A_ν heißt die Summenreihe der Reihe der a_ν.

Hat man umgekehrt eine Zahlenreihe $A_1, A_2, A_3, \ldots$, deren Glieder positiv sind und zugleich mit dem Index wachsen, so erhält man eine Reihe $a_1, a_2, \ldots$, deren Summenreihe die erstere ist, wenn man

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 - A_1, \quad a_3 = A_3 - A_2, \cdots$$

setzt. So ist die Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ die Summenreihe der aus lauter Einern bestehenden Reihe.

Die Reihe

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \ldots$$

ist die Summenreihe von

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots$$

u. s. f.

3. In Bezug auf die Summenreihen sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn es eine Zahl K von der Art gibt, daß alle A_n immer unter K bleiben, so haben nach § 23 die Zahlen A_n eine obere Grenze, die wir mit A bezeichnen wollen, d. h. es sind alle Zahlen A_n kleiner als A. Wenn aber Δ eine beliebige, noch so kleine positive Zahl ist, so liegen zwischen A und $A - \Delta$ Zahlen A_n. Da die A_n mit n zugleich wachsen, so liegen, wenn ein A_m in diesem Intervall liegt, auch alle A_n, in denen $n > m$ ist, in demselben Intervall.

In diesem Falle heißt die Summenreihe der A_n konvergent. Sie konvergiert gegen A, und die Konvergenz ist um so besser, je eher man bei gegebenem Δ in das Intervall $(A - \Delta, A)$ gelangt. Man nennt A die Summe der Reihe der a_n und setzt auch

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots.$$

Man sagt, die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, für die man auch einen einzelnen Buchstaben A setzen kann, konvergiert.

Häufig bedient man sich des Zeichens Σ (Summe) und setzt demgemäß

$$A = \sum^{h} a_h,$$

worin der Index h bei Σ bedeutet, daß h die Werte 1, 2, 3, ... bis ins Unendliche durchläuft.

4. Um den Grenzwert einer Größenreihe zu bezeichnen, bedient man sich des Zeichens Lim (Abkürzung für limes = Grenze) und schreibt also hier

$$\lim_{n=\infty} A_n = A, \tag{1}$$

und hierin bedeutet das unter Lim gesetzte $n = \infty$ (n gleich Unendlich), daß A_n dem Wert A beliebig nahe kommt, wenn n über alle Grenzen wächst. Man bezeichnet auch A, mit etwas ungenauem Ausdruck, als die Summe einer unendlichen Menge von Summanden a_h. Genauer können wir sagen:

> Die Summe einer unendlichen Reihe von positiven Gliedern ist die obere Grenze aller Summen aus einer endlichen Zahl dieser Glieder.

Wenn die Summe konvergent ist, so kann man durch Bildung der Summe A_n für ein hinlänglich großes n die Zahl A bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit berechnen, und hierauf beruht die häufige Anwendung der unendlichen Reihen.

Man beachte, daß bei der Bildung der Summe A_n die Glieder $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in ihrer Reihenfolge genommen sind, d. h. daß keiner der Summanden fehlen darf. Ist aber n schon so groß, daß A_n in dem vorgeschriebenen Intervall $(A - \Delta, A)$ liegt, so bleibt man in diesem Intervall, wenn man von den folgenden Gliedern $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ beliebige, auch außer der Reihe, also mit Übergehung von einigen, hinzuaddiert, da ja hierdurch A_n noch vergrößert wird, aber doch immer unter A bleibt.

5. Wenn aber keine Zahl existiert, unter der die Summen A_n bleiben, wenn also die A_n für hinlänglich große n über jede gegebene Zahl hinaus wachsen, dann heißt die Summenreihe der a_n divergent. Die Gesamtheit der Zahlen a_n hat in diesem Fall keine Summe. Man schreibt dann wohl auch

$$\lim_{n=\infty} A_n = \infty, \tag{2}$$

worin das Zeichen ∞ (Unendlich) nicht eine bestimmte Zahl bedeutet,

sondern es soll damit nur gesagt sein, daß die A_n über jede Zahl hinaus wachsen, wenn n unbegrenzt wächst.

6. Als eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz ergibt sich die, daß, wenn eine beliebig kleine positive Zahl ε angenommen ist, alle Summanden a_n kleiner als ε sind, wenn n einen gewissen (von ε abhängigen, hinlänglich großen) Zahlenwert m überschritten hat, d. h. es müssen die Zahlen a_n die untere Grenze Null haben, in Zeichen:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Denn wenn, wie groß auch m sei, immer noch größere Zahlen n vorkommen, für die $a_n > \varepsilon$ ist, so kann man n so groß annehmen, daß in A_n eine beliebig große Anzahl h von Gliedern vorkommt, die größer als ε sind, und daß also $A_n > h\varepsilon$ wird. Für jedes gegebene ε kann aber $h\varepsilon$ beliebig groß gemacht werden, wenn man h genügend groß nimmt.

Die Bedingung (3) ist also für die Konvergenz notwendig, aber sie ist keineswegs hinreichend.

Wir werden später Beispiele von Reihen kennen lernen, in denen die Bedingung (3) befriedigt ist, und die gleichwohl divergent sind.

§ 103. Unendliche geometrische Reihen.

1. Als erstes Beispiel einer unendlichen Reihe wollen wir die geometrische Reihe

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots$$

betrachten, in der x eine positive Zahl sein soll. Für die Summe A_n erhalten wir nach § 58:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn also $x < 1$ ist, so sind alle A_n kleiner als $1/(1-x)$, und $1/(1-x)$ ist zugleich die obere Grenze aller A_n, weil x^n mit unendlich wachsendem n unter jede Grenze heruntersinkt.

Es ist daher unter dieser Voraussetzung die Reihe der A_n konvergent, und wir können setzen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

Ist aber $x > 1$, so wächst A_n mit n über alle Grenzen, da in diesem

Falle x^n über alle Grenzen wächst. Die Reihe der A_n ist also für $x > 1$ divergent.

Für $x = 1$ endlich ist

$$A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = n,$$

und auch dies wächst mit n über alle Grenzen. Die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ist daher konvergent, wenn $x < 1$, divergent, wenn $x \geqq 1$ ist.

2. Zu den konvergenten geometrischen Reihen gehören auch die periodischen Dezimalbrüche, und der Beweis, den wir in § 69, 11. dafür gegeben haben, daß ein periodischer Dezimalbruch immer in einen gemeinen Bruch verwandelt werden kann, ist im Grunde nichts anderes, als die Summation dieser unendlichen geometrischen Reihe.

Wenn nämlich ein unendlicher Dezimalbruch

$$\gamma = 0{,}z_1 z_2 z_3 \ldots$$

die Periode

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$$

hat und die dekadisch geschriebene Zahl

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_f = m$$

gesetzt wird, so ist die Bedeutung dieses Dezimalbruches:

$$\begin{aligned}\gamma &= m 10^{-f} + m 10^{-2f} + m 10^{-3f} + \cdots \\ &= m 10^{-f}(1 + 10^{-f} + 10^{-2f} + \cdots),\end{aligned}$$

also, wenn $x = 10^{-f}$ ist und der Bruch (2) mit 10^f erweitert wird:

$$\gamma = \frac{m}{10^f - 1},$$

und dies ist ein rationaler Bruch, dessen Nenner eine mit lauter Neunern geschriebene ganze Zahl ist.

3. Auch ein nicht periodischer Dezimalbruch ist die Summe einer konvergenten unendlichen Reihe, denn ist

$$\gamma = 0{,}z_1 z_2 z_3 \ldots,$$

so setzen wir

$$\gamma_n = z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + z_3 10^{-3} + \cdots + z_n 10^{-n},$$

und alle diese γ_n sind kleiner als 1; folglich ist die Reihe γ konvergent.

§ 104. Weitere Beispiele divergenter und konvergenter Reihen.

1. Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die unendliche Reihe

$$(1)\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

deren Glieder $a_n = 1/n$ zwar der Bedingung § 102 (3) genügen, die aber, wie wir sehen werden, trotzdem divergiert.

Es ist nämlich

$$1 > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und man kann so die Summe (1) in eine beliebig große Zahl von Teilsummen zerlegen, deren jede größer als $\frac{1}{2}$ ist, und deren Gesamtsumme also beliebig groß wird.

2. Um das Wachsen etwas genauer zu untersuchen, setzen wir

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und für irgend ein m:

$$\sigma_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m-1}.$$

Wenn wir die m Glieder dieser Summe durch den zu kleinen Wert $1/2m$ ersetzen, so wird die Summe verkleinert, und ersetzen wir die Glieder durch $1/m$, so wird die Summe vergrößert. Es ist daher

$$1 > \sigma_m > \frac{1}{2}.$$

Nehmen wir $m = 1, 2, 2^2, 2^3, \cdots 2^{\nu-1}$, so wird

$$A_{2^\nu - 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_8 + \cdots + \sigma_{2^{\nu-1}}.$$

Es ist also

$$\nu > A_{2^\nu - 1} > \frac{\nu}{2},$$

und wenn $n \gtreqless 2^\nu - 1$ ist, so ist $A_n > \frac{\nu}{2}$ und wächst daher mit n ins Unendliche. Folglich ist die Reihe (1) divergent.

3. Wir betrachten ferner die Reihe

$$S_h = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots, \tag{2}$$

worin h irgend ein Exponent sei, der nicht notwendig ganzzahlig sein muß.

Ist $h = 1$, so geht S_h in die eben betrachtete Reihe A über, deren Divergenz wir nachgewiesen haben. Wenn $h < 1$ wird, so wird jedes Glied von S_h noch größer als das entsprechende Glied von A und folglich wird die Reihe S_h dann um so mehr divergent sein.

Es bleibt also noch der Fall $h > 1$ übrig.

Um die Konvergenz in diesem Fall zu untersuchen, bemerken wir, daß die Summe

$$\sigma_m = \frac{1}{m^h} + \frac{1}{(m+1)^h} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^h}$$

vergrößert wird, wenn wir alle m Glieder durch das erste $1/m^h$ ersetzen. Demnach ist

$$\sigma_m < \frac{1}{m^{h-1}}.$$

Dies wenden wir auf unsere Reihe an, indem wir $m = 1, 2, 4, 8, \cdots$ setzen:

$$1 = 1,$$

$$\frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} < \frac{1}{2^{h-1}},$$

$$\frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \frac{1}{6^h} + \frac{1}{7^h} < \frac{1}{2^{2(h-1)}},$$

$$\frac{1}{8^h} + \frac{1}{9^h} + \cdots + \frac{1}{15^h} < \frac{1}{2^{3(h-1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und wenn wir diese Teilsummen bis zu einem beliebigen Gliede hin addieren und

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots + \frac{1}{n^h}$$

setzen, so ergibt sich

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{2^{2(h-1)}} + \frac{1}{2^{3(h-1)}} + \cdots,$$

worin jetzt die Summe auf der rechten Seite ins Unendliche ausgedehnt werden kann, weil dadurch die Summe ja nur vergrößert wird.

Da nun $h > 1$ also $h - 1$ positiv und $1/2^{(h-1)}$ ein echter Bruch ist, so läßt sich die Summe der geometrischen Reihe auf der rechten Seite dieser Ungleichung nach § 103 finden, und es ergibt sich

$$S_n < \frac{1}{1 - 2^{1-h}},$$

und die Reihe (2) ist also konvergent, wenn $h > 1$ ist, divergent, wenn $h \lesseqgtr 1$ ist.

§ 105. Kennzeichen der Konvergenz.

1. Es lassen sich die Resultate der beiden letzten Paragraphen durch einen allgemeinen Satz über Reihenkonvergenz wesentlich verallgemeinern.

Dieser Satz lautet so:

Ist

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

eine konvergente unendliche Reihe (mit positiven Gliedern) und ist

$$k_1, k_2, k_3, \ldots k_n \ldots$$

irgend eine unendliche Reihe positiver Zahlen, die alle unter einer endlichen Grenze g bleiben, so ist auch die Reihe

$$K = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

konvergent.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich fast von selbst. Denn setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

$$K_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \cdots + k_n a_n,$$

so folgt aus den Voraussetzungen

$$K_n < g A_n, \tag{1}$$

und wenn daher alle A_n unter einer Grenze A bleiben, so bleiben die K_n unter der Grenze gA, und dies ist (bei Reihen mit positiven Gliedern) die hinreichende Bedingung der Konvergenz.

2. Diese Schlußweise wird in nichts geändert, wenn unter den Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ auch Null zugelassen wird, denn dann bleiben die K_n positiv, und die Ungleichung (1) bleibt bestehen. Es haben also auch dann noch die K_n eine obere Grenze. Daraus ergibt sich:

Die Summe aus irgend einem Teil der Glieder einer konvergenten Reihe ist gleichfalls konvergent.

3. Wenn man in einer unendlichen Reihe irgend eine bestimmte endliche Anzahl von Gliedern irgendwie abändert, so wird in Bezug auf die Divergenz oder Konvergenz der Reihe nichts geändert.

Denn ist m so groß, daß A_m alle abgeänderten Glieder enthält, so sind alle A_n, in denen $n > m$ ist, durch die Abänderung nur um eine und dieselbe endliche Größe geändert, und haben also auch nach der Abänderung eine endliche Grenze oder nicht, je nachdem das eine oder das andere vor der Abänderung stattfand.

4. Die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe läßt sich in manchen Fällen aus dem Bildungsgesetz der Glieder a_n beurteilen, und dazu führt der Satz 1. in Verbindung mit den Beispielen des vorigen Paragraphen. Das erste dieser Kennzeichen ist das folgende:

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

so beschaffen sind, daß das Verhältnis $a_{n+1} : a_n$ von einem bestimmten n an immer kleiner als ein echter Bruch bleibt, insbesondere also, wenn

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$$

ein echter Bruch ist, so ist die Reihe konvergent.

Um den Satz zu beweisen, nehme man eine Zahl x an, die der Ungleichung

$$\theta < x < 1$$

genügt, und setze $a_n = k_n x^n$. Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k_{n+1}}{k_n} x < \theta,$$

folglich, da $\theta : x$ ein echter Bruch ist,

$$k_{n+1} < k_n.$$

Die k_n bilden also eine Reihe abnehmender positiver Zahlen und bleiben daher alle unter einer endlichen Grenze. Da x ein echter Bruch ist, so ist die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergent, und nach dem Satz 1 konvergiert also auch die Reihe

$$k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Ist der Grenzwert $a_{n+1} : a_n$ größer als 1, so wachsen die a_n mit n zugleich und können also nicht den Grenzwert Null haben. Mithin ist die Reihe schon nach § 102, 6. divergent.

Der Grenzwert 1 für den Quotienten $a_{n+1} : a_n$ kann aber sowohl bei divergenten als bei konvergenten Reihen vorkommen.

Die Reihen, auf die wir die Frage hier zurückgeführt haben:

$$X = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots,$$

heißen Potenzreihen in Bezug auf x. Sie sind konvergent, wenn die $k_1, k_2, k_3, \ldots$ endlich bleiben, und x ein echter Bruch ist. Zu dieser Klasse gehören auch die unendlichen Dezimalbrüche, die man erhält, wenn man $x = 1/10$ setzt und unter $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Ziffern, d. h. Zahlen aus der Reihe 0, 1, ... 9 versteht.

5. Dieses Kennzeichen der Konvergenz ist auf das Beispiel der Reihen S_h § 104, 3. nicht anwendbar, denn wenn $a_n = n^{-h}$ ist, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^h},$$

und diese Quotienten haben den Grenzwert 1, was auch h sei. Es gibt aber unter den S_h, wie wir gesehen haben, sowohl konvergente als divergente Reihen.

Wir können aber aus diesem Beispiel selbst, das wir direkt untersucht haben, ein neues Kriterium gerade für solche Fälle herleiten, in denen das erste Kriterium ohne Entscheidung läßt.

Wenn na_n mit n über alle Grenzen wächst oder einen von Null verschiedenen Grenzwert g hat, so ist die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ divergent.

Denn unter einer dieser Voraussetzungen läßt sich eine positive Zahl c so annehmen, daß von einem hinlänglich großen Werte m von n an

$$a_n > \frac{c}{n}$$

ist. Es ist also auch

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots > c\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots\right)$$

und die Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung wird mit unendlich wachsender Gliederreihe unendlich (nach § 104, 1.).

6. Wenn ein Exponent h gefunden werden kann von der Art, daß

$$\lim_{n=\infty} a_n n^h = g$$

ein endlicher Grenzwert ist, so ist die Reihe $a_1 + a_2 + \cdots$ konvergent, wenn $h > 1$ ist.

Denn nach dieser Voraussetzung liegen die Zahlen

$$a_n n^h = k_n$$

alle unter einer endlichen Grenze, und da nach § 104, 3. die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \cdots$$

konvergiert, so konvergiert nach 1. auch die Reihe

$$k_1 + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

7. Nach diesen Sätzen ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\alpha+3\beta} + \frac{1}{\alpha+4\beta} + \cdots,$$

in der β eine positive Zahl ist, divergent, da der Grenzwert von

$$\frac{n}{\alpha+\beta n}=\frac{1}{\frac{\alpha}{n}+\beta}$$

gleich $1:\beta$, also nicht gleich Null ist.

8. Ist

$$f(n)=\alpha n^h+\alpha_1 n^{h-1}+\alpha_2 n^{h-2}+\cdots+\alpha_h,$$

worin $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$ gegebene Zahlen sind, von denen α positiv angenommen ist, so ist

$$\frac{f(n)}{n^h}=\alpha+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_h}{n^h},$$

und der Grenzwert dieses Ausdruckes für unbegrenzt wachsendes n ist also gleich α. Es bleibt also

$$\frac{n^h}{f(n)}=k_n$$

unter einer endlichen Grenze, und die Reihe

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots=\frac{k_1}{1^h}+\frac{k_2}{2^h}+\frac{k_3}{3^h}+\cdots$$

ist, wenn $h>1$ ist, konvergent (nach 1. und § 104, 3.).

9. Hiernach ist z. B. die Summe der reziproken Werte der aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\cdots,$$

deren allgemeines Glied

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$$

ist, konvergent. Wir sind hier in der Lage, die Summe wirklich bestimmen zu können; denn es ist

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

und folglich

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=2.$$

§ 106. Die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

1. Wir haben früher bei der Theorie der Logarithmen gesehen, durch welche Erwägungen Neper darauf geführt wurde, als Basis seines Logarithmensystems eine Zahl $(1+\varDelta)^{\frac{1}{\varDelta}}$ zu benutzen, worin $\varDelta$ eine sehr kleine Zahl (bei Neper ein Zehnmilliontel) war. Setzt man $\varDelta = 1/n$, so kommt man auf eine Zahl von der Form

$$N = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

worin n eine sehr große Zahl ist. Um über die Natur dieser Zahlen N, die alle positiv sind, Aufschluß zu erhalten, nehmen wir zunächst n als ganze Zahl an und entwickeln für ein unbestimmtes n, nach dem binomischen Satze. Wenn wir in der Formel

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots + \\ + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \ldots (n-(n-1))}{n!} x^n$$

$x = 1 : n$ setzen, so folgt:

$$(1) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \\ + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!},$$

woraus zunächst zu schließen ist, daß alle Zahlen N größer als 2 sind, da alle auf das erste folgenden Glieder positiv sind. Andererseits erhalten wir, wenn wir für alle Differenzen $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \cdots 1-\frac{n-1}{n}$ die größere Zahl 1 setzen:

$$(2) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!};$$

da nun ferner:

$$2! = 2, \quad 3! = 2 \cdot 3 > 2^2, \quad n! > 2^{n-1}$$

ist, so folgt um so mehr

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

und indem man die geometrische Reihe nach § 103 summiert:

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Es sind also alle diese Zahlen N kleiner als 3 und sie müssen folglich (nach § 23) eine obere Grenze haben, die wir nach einem feststehenden allgemeinen Gebrauch mit dem Buchstaben e bezeichnen.

2. Wir beweisen weiter, daß die Zahlen N zugleich mit n wachsen. Zu dem Ende bemerken wir, daß die Summanden auf

der rechten Seite von (1) alle positiv sind, und daß wir also den Ausdruck verkleinern, wenn wir einen Teil der Glieder weglassen. Ist also $m < n$, so ist

$$(4)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!},$$

ferner ist, da $m < n$ ist,

$$1-\frac{1}{n} > 1-\frac{1}{m},\quad 1-\frac{2}{n} > 1-\frac{2}{m},\cdots,$$

und mithin ist a fortiori:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber, wie aus der Formel (1) folgt, wenn darin m für n gesetzt wird, gleich $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ und folglich, wie bewiesen werden sollte,

$$(5)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \text{ wenn } n > m.$$

Wir schließen hieraus, daß für jedes n

$$(6)\quad e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

daß N sich dem Grenzwert e um so mehr annähert, je mehr n wächst und daß N für hinlänglich große n diesem Grenzwert beliebig nahe kommt, ohne ihn doch vollständig zu erreichen.

3. Man könnte hiernach die Zahl e durch Ausrechnung der Potenz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für ein hinlänglich großes n bis zu jedem Grad der Genauigkeit finden. Wegen allzugroßer Weitläufigkeit ist aber dieser Weg praktisch nicht gangbar. Ein viel einfacherer Weg zur Berechnung dieser Zahl ist folgender:

Aus (4) und (6) folgt für jedes m und jedes größere n:

$$(7)\quad e > 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!}.$$

Da nun, wenn man n hinlänglich groß nimmt, für jedes gegebene m die Faktoren

$$\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \left(1-\frac{2}{n}\right), \quad \left(1-\frac{3}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

der Einheit beliebig nahe gebracht werden können, so folgt aus (7) für jedes beliebige m

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

und mit Hilfe von (2)

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Nun können nach der Definition von e die beiden Zahlen e und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ einander so nahe gebracht werden als man will, und mithin kommt auch die zwischen ihnen gelegene Summe

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} \tag{8}$$

dem Werte e so nahe, als man will, wenn m hinlänglich groß ist, und dieser Ausdruck kann dann leicht in einen Dezimalbruch umgewandelt werden.

Hiermit ist die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

bereits nachgewiesen. Sie folgt aber auch aus dem allgemeinen Kennzeichen § 105, 4., denn es hat hier

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

den Grenzwert Null.

4. Um eine Schätzung für die Größe des Fehlers zu gewinnen, den man begeht, wenn man e aus dem Ausdruck (8) berechnet, setzen wir

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \varDelta_m$$

und für ein beliebiges $n > m$:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \varDelta_n.$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned}\varDelta_m - \varDelta_n &= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots n}\right).\end{aligned}$$

Es ist aber

$$1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots n}$$
$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m+1}},$$

und die letzte Summe ist gleich $2\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right)$, also kleiner als 2. Folglich ergibt sich

$$\varDelta_m < \varDelta_n + \frac{2}{(m+1)!}$$

und da man nun nach Nr. 3, indem man n groß genug nimmt, $\varDelta_n$ so klein machen kann als man will, so folgt

$$\varDelta_m < \frac{2}{(m+1)!}. \tag{9}$$

Die Berechnung des Ausdruckes (8) ist leicht, da man, um das m^{te} Glied aus dem $(m-1)^{\text{sten}}$ zu erhalten, dieses nur durch m zu dividieren hat. Man erhält z. B. auf sieben Dezimalstellen richtig:

2
0,5
0,1666666667
0,0416666667
0,0083333333
0,0013888889
0,0001984127
0,0000248016
0,0000027557
0,0000002756
0,0000000251
―――――――――
2,7182818 .

Ein genauerer Wert ist

$$e = 2{,}7\,1828\,1828\,45\,90\,45\,23536\,02874\,71353.$$

5. Von der Voraussetzung, daß in dem Ausdruck

$$N = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n nur als ganze Zahl wachsen sollte, können wir uns leicht befreien, und damit den allgemeinen Satz beweisen:

Der Grenzwert von

$$X = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

für ein irgendwie unbegrenzt wachsendes x ist gleich der Zahl e.

Dies ergibt sich aus dem jetzt zu beweisenden Hilfssatz:

Ist $x < y$, so ist

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y. \tag{10}$$

Wir haben in § 58, 3. für eine beliebige ganze Zahl n die identische Gleichung bewiesen

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

worin a und b ganz beliebige Grössen sein können.

Nehmen wir a und b positiv und $a > b$ an, so wird die Summe auf der rechten Seite, die aus n positiven Gliedern besteht, vergrößert, wenn wir b durch a ersetzen, und es ist daher

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}$$

oder

$$a^n - b^n < na^{n-1}(a - b), \tag{11}$$

woraus weiter folgt:

$$a^{n-1}(a - n(a - b)) < b^n \tag{12}$$

unter der Voraussetzung $a > b$.

Wir verstehen unter p eine zweite ganze Zahl und setzen:

$$a = 1 + \frac{p}{n-1}, \quad b = 1 + \frac{p}{n},$$

$$a - b = \frac{p}{n(n-1)}, \quad a - n(a - b) = 1,$$

und dann ergibt die Ungleichung (12)

$$\left(1 + \frac{p}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n,$$

und indem man diese Formel wiederholt anwendet:

$$\left(1 + \frac{p}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n,$$

wenn m und n zwei positive Zahlen sind und

$$m < n$$

ist. Diese Ungleichung bleibt richtig, wenn wir rechts und links die p^{te} Wurzel ziehen, und wir erhalten

$$\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}. \tag{13}$$

Irgend zwei positive rationale Zahlen x, y lassen sich nun mit demselben Nenner darstellen, und wir können also, wenn $x < y$ ist,

$$x = \frac{m}{p}, \quad y = \frac{n}{p}$$

setzen. Dann aber geht die Ungleichung (13) in (10) über, und diese ist also für rationale x und y bewiesen.

Daß aber der Satz auch für irrationale x und y noch richtig bleibt, folgt aus dem Fundamentalsatz der Stetigkeit (§ 33, 8. und § 24, 5.).

Daraus folgt nun unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes. Denn sind m und n ganze Zahlen und

$$m < x < n,$$

so ist

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

und wenn also m hinlänglich groß genommen wird, so kommt $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ und folglich auch $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ der Zahl e beliebig nahe.

6. Wir können den Satz 5. noch dahin erweitern, daß X auch dann noch die Grenze e hat, wenn x negativ ist und dem absoluten Werte nach ins Unendliche wächst.

Setzen wir nämlich in der Ungleichung (11)

$$a = 1, \quad b = 1 - \frac{p^2}{n^2}, \quad a - b = \frac{p^2}{n^2},$$

so folgt

$$1 - \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n < \frac{p^2}{n}$$

und folglich

$$1 > \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{p^2}{n}.$$

Da sich nun mit unendlich wachsendem n und festgehaltenem p die rechte Seite dieser Ungleichung der Grenze 1 nähert, so folgt, daß sich auch $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n$ und folglich auch $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{p}}$ mit unendlich wachsendem n der Grenze 1 (von unten her) annähert. Setzen wir also

$$x = \frac{n}{p},$$

so ergibt sich für $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$ und ein unendlich wachsendes n der Grenzwert 1.

Es ist aber:

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

und da $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ den Grenzwert e und die linke Seite den Grenzwert 1 hat, so hat $\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ den Grenzwert $1:e$ und folglich auch

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

den Grenzwert e, wie bewiesen werden sollte.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

§ 107. Allgemeine Definition der Summe einer unendlichen Reihe.

1. Es genügt für die Anwendungen nicht, unendliche Reihen mit nur positiven Gliedern zu betrachten. Man muß die Untersuchung auch auf solche Reihen ausdehnen, in denen positive und negative Glieder vorkommen. Wenn die Anzahl der negativen Glieder endlich ist, dann kann die Frage nach der Konvergenz durch den Satz § 105, 3. auf den Fall von nur positiven Gliedern zurückgeführt werden. Wenn aber die Anzahl der positiven Glieder sowohl als der negativen unbegrenzt ist, müssen wir einen anderen Weg einschlagen; wir kommen in diesem Falle nicht mehr mit dem Begriff der oberen Grenze aus, sondern müssen den Begriff der Grenze allgemeiner fassen.

2. Es sei jetzt

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$$

eine unendliche Reihe von Gliedern, für die in Bezug auf die Vorzeichen keine Beschränkung besteht. Wir setzen wie früher:

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n.$$

Es sei C irgend eine Zahl, $\varDelta$ eine beliebig kleine gegebene positive Zahl und α, β seien zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß

$$\alpha < C < \beta, \quad 0 < \beta - \alpha < \varDelta \tag{1}$$

sei.

Es heißt dann C die Grenze der Zahlen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n, \ldots$ wenn man die Zahl m so bestimmen kann, daß

$$\alpha < C_n < \beta, \text{ wenn } n > m. \tag{2}$$

Es sind also die C_n Näherungswerte für die Zahl C, in demselben Sinne, wie wir diesen Ausdruck im § 24 gebraucht haben.

Wenn eine solche Zahl C existiert, so setzen wir $\lim\limits_{n=\infty} C_n = C$ und nennen C die Summe der unendlichen Reihe.

Wir können dann auch sagen, daß die Größen C_n bei wachsendem n um den Wert C schwanken, daß aber die Schwankungen immer kleiner werden und schließlich unter jede Grenze heruntersinken, wenn n unbegrenzt wächst. Wir schreiben in diesem Fall

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

und die Reihe, die wir auch die Reihe C nennen, wird dann konvergent genannt. Für den Fall, wo die $c_1, c_2, c_3, \ldots$ alle positiv sind, fällt diese Definition der Konvergenz und der Summe der Reihe mit den früher gegebenen zusammen.

3. Als allgemeines notwendiges und hinreichendes Kennzeichen der Konvergenz ergibt sich folgendes:

Man bezeichne mit m, n irgend zwei natürliche Zahlen und setze

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}. \tag{3}$$

Die Reihe C ist konvergent, wenn $R_{n,m}$ dem absoluten Werte nach kleiner wird als eine beliebig kleine Zahl ω, wenn n und $n+m$ beide größer sind als eine hinlänglich große Zahl N.

Diese Bedingung läßt sich in unserer Zeichensprache auch so ausdrücken

$$\lim_{N=\infty} R_{n,m} = 0. \tag{4}$$

Sie ist aber nicht bloß hinreichend, sondern auch notwendig.

4. Daß die Bedingung (4) für die Konvergenz notwendig ist, ist leicht einzusehen. Denn wenn $R_{n,m}$ immer noch größer werden könnte als irgend ein positives ω, wie groß auch N sei, so würden

$$C_{n+m} - C_n = R_{n,m}$$

gleichfalls größer als ω sein können, wie groß auch n angenommen wäre; die Schwankungen von C_n würden also nicht unter ω heruntergehen, wie groß auch n angenommen würde.

5. Um nachzuweisen, daß die Bedingung (3) auch hinreichend ist, müssen wir aus ihr die Existenz einer Zahl C ableiten, die natürlich im allgemeinen irrational sein wird, selbst dann, wenn die Zahlen

c_n rational sein sollten. Diese Zahl C müssen wir also durch einen Schnitt definieren (§ 22).

Greifen wir irgend eine Zahl z aus der Reihe der reellen Zahlen heraus, so ist von zweien nur eins möglich:

α) Wie groß auch N sei, es gibt immer noch Zahlen $n > N$, für die $C_n > z$ wird. Ein solches z wollen wir eine „Zahl a" nennen.

β) Man kann N so groß annehmen, daß, wenn $n > N$ ist, immer $C_n \leqq z$ ist. Ein solches z soll eine „Zahl b" heißen.

Unter der Voraussetzung (4) gibt es sowohl Zahlen a als Zahlen b. Denn nach (4) können wir n_0 so groß annehmen, daß, was auch m sei,

$$R_{n_0, m} = C_{n_0+m} - C_{n_0} < \omega \text{ (dem absoluten Werte nach)}$$

für ein beliebig anzunehmendes positives ω. Folglich ist, wenn wir den Wert n_0 festhalten, und $n = n_0 + m$ setzen, für jedes beliebige m

$$C_{n_0} - \omega < C_n < C_{n_0} + \omega.$$

Ist also $z > C_{n_0} + \omega$, so ist z eine Zahl b.

Ist aber $z < C_{n_0} - \omega$, so ist es eine Zahl a, und sonach existieren diese beiden Arten von Zahlen. Überdies ist jede Zahl a kleiner als jede Zahl b, und die beiden Zahlenarten a, b werden also durch einen Schnitt von einander getrennt. Dieser Schnitt erzeugt eine Zahl C, von der wir nun noch nachzuweisen haben, daß sie die Grenze der C_n ist. Dies ergibt sich so:

Ist α eine beliebige Zahl a, β eine beliebige Zahl b, so ist, wenn wir ausschließen, daß α oder β gleich C sei, nach dem Begriff des Schnittes

$$\alpha < C < \beta. \tag{5}$$

Wir nehmen nun eine positive Zahl ω so klein, daß auch noch

$$\alpha + \omega < C < \beta - \omega \tag{6}$$

ist, mit anderen Worten, daß auch noch $\alpha + \omega$ eine Zahl a und $\beta - \omega$ eine Zahl b ist, und nehmen N so groß, daß, wenn n_0 und $n_0 + m$ größer als N ist,

$$C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega. \tag{7}$$

Nun läßt sich wegen α) und β) eine Zahl $n_0 > N$ so annehmen, daß $\alpha + \omega < C_{n_0}$, $\beta - \omega > C_{n_0}$, daß also

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0} + \omega < \beta \tag{8}$$

und wegen (7) für jedes positive m

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega < \beta,$$

also wenn $n_0 + m = n$ gesetzt wird, für jedes hinlänglich große n

(9) $$\alpha < C_n < \beta.$$

Aus (5) und (9) aber ergibt sich, daß C die Grenze der C_n ist, wie bewiesen werden sollte.

6. Hiernach läßt sich das Theorem § 105, 1. dahin erweitern: Ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

eine konvergente Reihe aus positiven Gliedern und sind

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$$

positive oder negative Zahlen, die ihrem absoluten Werte nach unter einer endlichen Grenze g bleiben, so ist auch

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

konvergent.

Denn es ist

$$k_n a_n + k_{n+1} a_{n+1} + \cdots + k_{n+m} a_{n+m}$$

dem absoluten Werte nach kleiner als

$$g(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}),$$

woraus die Konvergenz folgt.

§ 108. Unbedingte und bedingte Konvergenz.

1. Es mögen nun in der Reihe

(𝔈) $$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$$

sowohl positive als negative Glieder vorkommen. Wir bezeichnen die positiven unter ihnen mit

(𝔄) $$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

und die negativen mit

(𝔅) $$-b_1, -b_2, -b_3, -b_4, \cdots.$$

In (𝔄) und (𝔅) sollen die Glieder in derselben Reihenfolge genommen sein, wie sie in (𝔈) vorkommen, und beide Reihen sollen unendlich sein.

Wenn die Summen

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

beide konvergieren, so konvergiert auch die Summe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

und es ist

$$C = A - B. \tag{1}$$

Denn wir können

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

zerlegen in

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_\nu = A_\mu - B_\nu,$$

und wenn n ins Unendliche wächst, so wachsen auch μ und ν ins Unendliche. Es ist also

$$\operatorname{Lim} C_n = \operatorname{Lim} A_\mu - \operatorname{Lim} B_\nu,$$

was auf die Gleichung (1) führt. Wir haben damit den Satz bewiesen.

Eine unendliche Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist immer konvergent, wenn die Reihe der positiven Glieder für sich und die Reihe der negativen Glieder für sich konvergiert.

Unter dieser Voraussetzung ist auch die Reihe aus lauter positiven Gliedern konvergent, die man erhält, wenn man die Glieder $c_1, c_2, c_3, \ldots$ durch ihre absoluten Werte $c_1', c_2', c_3', \ldots$, d. h. wenn man die b_i durch $-b_i$ ersetzt, und zwar ist die Summe

$$C' = c_1' + c_2' + c_3' + \cdots = A + B,$$

und umgekehrt kann die Reihe C' nur dann konvergieren, wenn sowohl A als B konvergent sind. Eine Reihe, die konvergent bleibt, wenn alle Glieder durch ihren absoluten Wert ersetzt werden, heißt unbedingt konvergent. Bei diesen Reihen gelten im wesentlichen dieselben Gesetze, wie bei den Reihen mit nur positiven Gliedern.

2. Wenn von den beiden Reihen A, B die eine konvergiert, die andere divergiert, so kann die Reihe C nicht konvergieren, denn es wird dann $C_n = A_\mu - B_\nu$ positiv oder negativ unendlich, je nachdem A oder B divergiert. Anders ist es aber, wenn die Reihen A und B beide divergieren. Dann wird zwar die Reihe C', deren Glieder die absoluten Werte der Glieder von C sind, sicher auch divergieren. Es kann aber trotzdem die Reihe C konvergieren, da sich das unendliche Anwachsen ins positive und negative Unendlich bei $A_\mu - A_\nu$ gegenseitig ausgleichen kann. Wir haben es dann mit einer besonderen Art von Reihen zu tun, die man bedingt konvergent nennt. Der Grund dieser Bezeichnung wird nachher noch deutlicher hervortreten.

3. Für die bedingte Konvergenz haben wir nicht so bestimmte Kennzeichen wie für die unbedingte. Es gilt aber der folgende einfache Satz:

Wenn in einer Reihe, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben:

(1) $$P = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - \cdots$$

die $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ positive abnehmende Größen sind, also für jedes n

(2) $$p_n < p_{n-1}$$

und wenn

(3) $$\lim_{n=\infty} p_n = 0$$

ist, so ist P konvergent.

Der Beweis ist sehr einfach: Da die Differenzen

$$(p_1 - p_2), (p_3 - p_4), (p_5 - p_6), \cdots (p_{2m-1} - p_{2m})$$

alle positiv sind, so sind, wenn wir

$$P_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots \pm p_n,$$

setzen, die P_n alle positiv und die Summen

$$P_2, P_4, P_6, \ldots P_{2m}$$

bilden eine Reihe wachsender Zahlen. Dagegen bilden die

$$P_1, P_3, P_5, \ldots P_{2m-1}$$

eine Reihe abnehmender Zahlen, denn es ist z. B.

$$P_1 = p_1, \quad P_3 = p_1 - (p_2 - p_3),$$
$$P_5 = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5), \cdots.$$

Es ist zugleich

$$P_{2m-1} - P_{2m} = p_{2m},$$

also positiv, und daher

$$P_{2m} < P_{2m-1}.$$

Wegen (3) nähert sich aber die Differenz $P_{2m-1} - P_{2m}$ mit unendlich wachsendem m dem Grenzwert Null, und damit ist bewiesen, daß die beiden Größenreihen P_{2m}, P_{2m-1} einer und derselben Grenze P zustreben. (Vgl. denselben Schluß in § 79.)

4. Wenn zwar die Bedingung (2), nicht aber (3) erfüllt ist, wenn sich also die p_n mit unendlich wachsendem n einer von Null verschiedenen Grenze nähern, so haben die P_{2m} eine obere, die P_{2m-1} eine untere Grenze, aber diese Grenzen sind nicht einander gleich. Die Summe P_n nähern sich daher zwei verschiedenen Grenzen, je nachdem man mit einem geraden oder einem ungeraden n abbricht. Solche Reihen, die übrigens in den Anwendungen wenig vorkommen, nennt man oszillierende Reihen, weil ihr Wert gewissermaßen

zwischen zwei Werten oszilliert. Das einfachste Beispiel einer Reihe dieser Art ist

$$+1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

diese Summe hat den Wert 0 oder den Wert 1, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Zahl von Gliedern addiert. Zu den konvergenten Reihen sind diese nicht mehr zu rechnen.

5. Zu den Reihen, die nach dem Satz 3. konvergieren, gehören unter anderen die beiden folgenden

$$(4)\qquad P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

$$(5)\qquad Q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Die Reihe P enthält alle Brüche mit dem Zähler 1 (Stammbrüche), die mit ungeradem Nenner mit dem positiven, die mit geradem Nenner mit dem negativen Zeichen. Die Reihe Q enthält nur Glieder mit ungeradem Nenner, aber gleichfalls mit abwechselndem Zeichen. Es zeigt sich hier aber eine eigentümliche Erscheinung. Wir setzen zur Abkürzung:

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1},$$

$$G_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Dann ist

$$S_n = 2\,G_n$$

und die Summe der $2n$ ersten Glieder der Reihe P:

$$P_{2n} = U_n - G_n;$$

ferner ist

$$S_{2n} = U_n + G_n = 2\,G_{2n}$$

und folglich

$$(6)\qquad P_{2n} = U_n - G_n = 2\,(U_n - G_{2n}).$$

Nun ist aber $U_n - G_{2n}$ die Summe der $3n$ ersten Glieder der Reihe

$$(7)\qquad R = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

die ebenfalls alle Brüche mit dem Zähler 1 enthält, und wie die Reihe P die mit ungeradem Nenner mit dem positiven, die mit geradem Nenner mit dem negativen Zeichen.

Die Glieder der Reihe R sind aber nicht der Größe nach geordnet, sondern es folgen auf ein positives Glied immer zwei negative,

dann wieder ein positives u. s. f. Die Gleichung (6) zeigt aber, daß auch R konvergiert, daß aber

$$R = \tfrac{1}{2} P$$

ist. Es hat also die Reihe R eine andere Summe als die Reihe P, obwohl jedes Glied, das in der einen Reihe vorkommt, auch in der anderen enthalten ist und umgekehrt.

Dies Resultat erscheint auf den ersten Blick paradox, und es wird es noch mehr, wenn man sich, wie es bisweilen geschieht, so ausdrückt, daß die Summe einer solchen Reihe von der Reihenfolge der Summation abhängig sei, was dem kommutativen Gesetz der Addition zu widersprechen scheint. Der wahre Grund der Erscheinung ist der, daß in der Summe $R_{3n} = U_n - G_{2n}$ zwar alle Glieder vorkommen, die in P_{2n} enthalten sind, aber außerdem noch eine gewisse Anzahl negativer Glieder, die in P erst später auftreten, und die Anzahl dieser Glieder wächst mit n ins Unendliche.

6. Dieses Verhalten der bedingt konvergenten Reihen wird sehr geklärt durch eine Betrachtung von Riemann, die zu einem merkwürdigen Satz führt.

Es seien

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

zwei divergente Reihen aus positiven Gliedern. Wir setzen aber voraus, daß

$$\operatorname{Lim} a_n = 0, \quad \operatorname{Lim} b_n = 0 \tag{8}$$

sei. Daß es solche Reihen gibt, haben wir in § 105 gesehen. Wir können z. B. die vorhin benutzten Reihen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

dafür nehmen.

Wir bilden eine Reihe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots,$$

indem wir zunächst eine Anzahl positiver Glieder $a_1, a_2, \ldots,$ dann eine Anzahl negativer Glieder $-b_1, -b_2, \cdots,$ hierauf wieder einige positive Glieder a, dann wieder negative Glieder $-b, \cdots$ nehmen, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Glieder a sowohl als $-b$ in ihrer Reihenfolge zur Verwendung kommen, ohne daß eines übergangen wird oder mehrmals vorkommt.

Es läßt sich nun zeigen, daß man diese Anordnung so treffen

kann, daß die Reihe C konvergiert und einen ganz beliebig gegebenen Wert x hat. Es ergibt sich dies aus einer ganz einfachen Überlegung.

Nehmen wir x positiv an, so können wir, da die Reihe A unendlich wird, mit der Summation von Gliedern a so weit gehen, daß die Summe größer wird als x, und daß der Überschuß über x kleiner ist, als das zuletzt hinzugefügte a. Hierauf nimmt man soviele Glieder $-b$, bis die Summe wieder unter x heruntergesunken ist, und der Unterschied kleiner ist als das zuletzt abgezogene b. Darauf addiert man Glieder a, bis man wieder über x gekommen ist, und fährt beliebig lange fort. Der Unterschied zwischen der Summe und der Zahl x ist immer kleiner als das zuletzt hinzugefügte Glied a oder $-b$ und kann also wegen (8) unter jede Grenze heruntergebracht werden. Die so gebildete Summe C konvergiert also gegen x, und damit ist der Riemannsche Satz bewiesen.

§ 109. Der Abelsche Satz von der Stetigkeit der Potenzreihen.

1. Wir haben in § 105 schon Reihen von der Form betrachtet

$$S(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{1}$$

die wir Potenzreihen genannt haben; $a_1, a_2, a_3, \cdots$ heißen die Koeffizienten der Reihe, x das Argument. Wir haben gesehen, daß diese Reihe konvergiert, wenn die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ positiv sind und unter einer endlichen Grenze liegen, und wenn $x < 1$ ist, und die Konvergenz bleibt nach § 107, 6. bestehen, wenn die $a_1, a_2, a_3, \cdots$ zum Teil negativ sind, wenn sie nur dem absoluten Werte nach unter einer endlichen Grenze bleiben.

Wir wollen jetzt die Annahme machen, daß die Reihe der Koeffizienten

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{2}$$

konvergent sei und den Wert A habe. Da dies nur dann möglich ist, wenn sich die a_n der Grenze Null nähern, so schließt diese Annahme die Konvergenz der Reihe (1) für $x < 1$ ein.

2. Es besteht unter dieser Voraussetzung der folgende Satz:

Wenn sich x von kleineren Werten der Grenze 1 annähert, so ist A der Grenzwert, dem sich $S(x)$ bis auf jeden beliebigen Grad annähert. In Zeichen

$$\operatorname*{Lim}_{x=1} S(x) = A. \tag{3}$$

Dieser Satz ist zuerst von Abel bewiesen und zu wichtigen Folgerungen benutzt worden. Der Beweis ergibt sich so:

3. Man setze

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \tag{4}$$

so daß nach der Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} A_n = A$$

ein bestimmter Wert ist.

Nach (4) kann man die a_n durch die A_n ausdrücken und man erhält

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1, \\ a_2 &= A_2 - A_1, \\ a_3 &= A_3 - A_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n &= A_n - A_{n-1}, \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} &a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n = \\ &= (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + A_n x^n. \end{aligned}$$

Ist nun $x < 1$, so hat x^n für ein unendlich wachsendes n den Grenzwert 0 und A_n bleibt endlich. Demnach ergibt sich, so lange $x < 1$ ist:

$$S(x) = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdot\ \cdot), \tag{4}$$

und die unendliche Reihe $S(x)$ ist also in eine andere Reihe verwandelt, die gleichfalls für $x < 1$ konvergent ist.

Wir verstehen jetzt unter n irgend eine endliche Zahl, und setzen nach (4)

$$S(x) = (1-x) F_n(x) + (1-x) R_n(x), \tag{5}$$

worin

$$\begin{aligned} F_n(x) &= A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} \\ R_n(x) &= A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

sodaß $R_n(x)$ wieder eine unendliche Reihe ist, deren Koeffizienten $A_n, A_{n+1}, A_{n+2} \ldots$ positiv sind und dem Werte A alle beliebig nahe kommen, wenn n groß genug angenommen wird. Setzen wir also $A_n = A + \alpha_n$, $A_{n+1} = A + \alpha_{n+1}, \cdots$ und beachten die Summenformel der geometrischen Reihe

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = \frac{x^n}{1-x},$$

so ist

$$R_n(x) = \frac{A x^n}{1-x} + \frac{\varrho}{1-x},$$

worin

$$\frac{\varrho}{1-x} = \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \cdots.$$

Wir können nun n so groß annehmen, daß die $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots,$

dem absoluten Werte nach alle kleiner als eine beliebig kleine positive Größe $\varDelta$ werden, und dann ist, ebenfalls dem absoluten Werte nach,

$$\frac{\varrho}{1-x} < \varDelta(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots) = \frac{\varDelta x^n}{1-x},$$

also

$$\varrho < \varDelta x^n < \varDelta\cdot$$

Es wird dann nach (5)

$$S(x) = (1-x)F_n(x) + Ax^n + \varrho,$$

$$S(x) - A = (1-x)F_n(x) - A(1-x^n) + \varrho\cdot \tag{6}$$

Hieraus läßt sich schließen, daß man x so nahe an 1 nehmen kann, daß die Differenz $S(x) - A$ kleiner als eine beliebig kleine Größe $2\varDelta$ wird, und dies ist der Inhalt der Formel (3).

Denn auf der rechten Seite von (6) kann man das willkürliche n zunächst so groß nehmen, daß $\varrho < \varDelta$ wird, und wenn dies geschehen ist, kann man $1 - x$ und $1 - x^n$ wieder so klein (und positiv) annehmen, daß auch

$$(1-x)F_n(x) - A(1-x^n) < \varDelta$$

ist, und dann ist $S(x) - A < 2\varDelta$ (dem absoluten Werte nach).

Hiermit ist also der Abelsche Satz erwiesen. Er kann in solchen Fällen dazu dienen, die Summe A zu finden, wenn man $S(x)$ und seinen Grenzwert für $x = 1$ ermitteln kann.

§ 110. Reihen mit komplexen Gliedern.

1. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

komplex sind, so haben sie die Form

$$c_1 = a_1 + b_1 i,\quad c_2 = a_2 + b_2 i,\quad c_3 = a_3 + b_3,\ \cdots,$$

worin die $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ reelle Zahlen sind.

Die Summe einer solchen Reihe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots$$

ist nur dann als konvergent zu bezeichnen, wenn die reellen Teile für sich und die imaginären Teile für sich konvergieren, wenn also

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$$

konvergente Reihen sind, und dann ist

$$C = A + Bi$$

die Summe der Reihe C.

Denn wenn A und B die Grenzen von A_n und B_n sind, so ist $A + Bi$ die Grenze von $A_n + B_n i$; und es kann auch niemals $A_n + B_n i$ einen Grenzwert haben, wenn nicht den A_n und B_n einzeln ein solcher zukommt.

2. Für die Konvergenz solcher Reihen ergibt sich dasselbe allgemeine Kennzeichen, wie für die Reihen mit reellen Gliedern, nämlich, wenn wir

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}$$

setzen, so muß $R_{n,m}$, dem absoluten Werte nach, unter jede noch so kleine Zahl heruntersinken, wenn n und $n+m$ beide größer sind, als eine hinlänglich große Zahl N.

Als spezieller Fall ist darin enthalten, daß c_n selbst dem absoluten Werte nach unter jeden Zahlenwert heruntersinken muß, was hiernach eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung der Konvergenz ist, wie in § 102, 6.

Unter dem absoluten Wert einer komplexen Zahl $z = x + iy$ haben wir schon früher (§ 47) die positive Zahl

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

verstanden.

Es ist nun hier zweckmäßig, für den absoluten Wert einer komplexen Zahl z ein einfaches, allgemeines Zeichen zu gebrauchen, und wir folgen Weierstraß, wenn wir dazu die Größe z in zwei vertikale Striche einschließen. Demnach ist

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Über die Konvergenz der Reihen C mit komplexen Gliedern gilt der allgemeine Satz:

Die Reihe C ist konvergent, wenn die Reihe der absoluten Werte

$$C' = |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + \cdots$$

konvergiert.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satze § 47, 5., nach dem der absolute Wert einer Summe niemals größer ist als die Summe der absoluten Werte; denn darnach ist, wenn wir

$$R'_{n,m} = |c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}|$$

setzen,

$$|R_{n,m}| \leqq R'_{n,m},$$

und wenn also $R'_{n,m}$ die Null zur Grenze hat, so gilt dasselbe von $R_{n,m}$.

Dieser Satz läßt sich aber, ebensowenig wie der entsprechende Satz bei reellen Reihen mit positiven und negativen Gliedern, umkehren. Es kann sehr wohl vorkommen, daß die Reihe C konvergiert, während die Reihe C' divergiert. Wir unterscheiden also auch hier bedingte und unbedingte Konvergenz. Wir nennen eine konvergente Reihe mit komplexen Gliedern unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Werte der Glieder konvergiert, sonst bedingt konvergent.

4. Es ergibt sich hieraus weiter der Satz:

Wenn die Reihe

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots$$

unbedingt konvergiert, und wenn

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; c_4, \; \ldots$$

irgend eine Reihe komplexer Zahlen ist, deren absolute Werte

$$|c_1|, \; |c_2|, \; |c_3|, \; |c_4|, \; \ldots$$

nicht ins Unendliche wachsen, so ist auch die Reihe

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \cdots$$

unbedingt konvergent.

Denn setzen wir

$$R_{n,m} = c_{n+1} w_{n+1} + c_{n+2} w_{n+2} + \cdots + c_{n+m} w_{n+m},$$

so ist, da der absolute Wert eines Produktes gleich dem Produkte der absoluten Werte der Faktoren ist,

$$|R_{n,m}| \overline{\gtrless} |c_{n+1}| \cdot |w_{n+1}| + |c_{n+2}| \cdot |w_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}| \cdot |w_{n+m}|,$$

und wenn die $|c_{n+1}|, \; |c_{n+2}|, \; \ldots \; |c_{n+m}|$ alle kleiner als eine bestimmte positive Zahl g sind, so ist

$$|R_{n,m}| < g \, \{ |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + |w_{n+m}| \},$$

und wenn die Reihe W unbedingt konvergiert, so sinkt die rechte Seite dieser Ungleichung unter jede beliebige Zahl herunter. Das Gleiche gilt also von der linken, und der Satz 4. ist damit bewiesen.

§ 111. Potenzreihen. Konvergenzkreis.

1. Wir betrachten jetzt Potenzreihen, in denen sowohl das Argument z als die Koeffizienten c_ν komplexe Zahlen sein können,

und bezeichnen sie, indem wir noch ein von dem Argument unabhängiges Glied c_0 hinzufügen, mit

$$(1) \qquad S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots.$$

Wir setzen

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

und stellen z nach § 47 durch die Punkte einer Ebene dar. Es ist dann r der absolute Wert $|z|$ von z, und die repräsentierenden Punkte aller Werte z mit demselben absoluten Wert r liegen auf einem Kreis (r), dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist.

2. Es gibt Potenzreihen, die für jeden Wert des Argumentes z konvergieren. Eine solche Reihe ist z. B.

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

denn in der Reihe der absoluten Werte

$$1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots$$

ist das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ zum n^{ten} Gliede

$$\frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{r}{n}$$

und hat also die Null zur Grenze, welchen Wert auch r haben mag. Daraus ergibt sich die Konvergenz nach § 105, 4.

Dagegen gibt es auch Reihen, die für keinen Wert von z (außer $z = 0$) konvergieren. Eine solche ist z. B.

$$1 + 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + 4!z^4 + \cdots.$$

Denn nach § 48, 2. kann man, wie klein auch das positive r sein mag, wenn c eine Zahl $> r$ ist, n so groß annehmen, daß $n!r^n > c^n$ wird; es wachsen daher schon die einzelnen Glieder dieser Reihe mit n ins Unendliche und die Reihe kann nicht konvergent sein.

Im allgemeinen wird aber eine Potenzreihe für gewisse Werte von z konvergieren, für andere divergieren. Für diese Reihen gelten die folgenden Sätze:

3. Ist γ_n der absolute Wert von c_n und r_1 eine positive Zahl von der Art, daß $\gamma_n r_1^n$ mit unbegrenzt wachsendem n nicht unendlich wird, so konvergiert die Reihe $S(z)$ unbedingt für jeden Wert von z, dessen absoluter Wert kleiner als r_1 ist.

Wenn nämlich $r : r_1$ ein echter Bruch ist, so konvergiert die Reihe

$$1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots$$

und folglich auch (nach § 110, 3., 4.)

$$\gamma_0 + \gamma_1 r_1 \frac{r}{r_1} + \gamma_2 r_1^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \gamma_3 r_1^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots,$$

deren Glieder die absoluten Werte der Reihe $S(z)$ sind. Also konvergiert auch $S(z)$ unbedingt.

4. Wenn $\gamma_n r^n$ für alle Werte von r endlich bleibt, so konvergiert $S(z)$ für alle Werte von z, und dasselbe gilt natürlich auch umgekehrt.

Wenn $\gamma_n r^n$ für irgend ein r endlich bleibt, so gilt dasselbe für alle kleineren Werte von r. Wenn daher $\gamma_n r^n$ zwar nicht für alle, wohl aber für gewisse Werte von r endlich bleibt, so haben diese Werte von r eine obere Grenze ϱ und die Reihe $S(z)$ konvergiert für alle Werte von z, deren absoluter Wert kleiner ist als ϱ.

Ein Kreis mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt als Mittelpunkt heißt der Konvergenzkreis der Potenzreihe $S(z)$ und wir haben den Satz:

> **5.** Die Reihe $S(z)$ konvergiert für jeden Punkt z im Innern des Konvergenzkreises.

> **6.** Dagegen kann $S(z)$ für keinen Punkt konvergieren, der außerhalb des Konvergenzkreises liegt.

Denn wenn $S(z)$ konvergiert, so muß $\operatorname{Lim} c_n z^n = 0$ sein. Es muß dann $\gamma_n r^n$ endlich bleiben und r müßte kleiner als ϱ oder höchstens gleich ϱ sein.

Über die Konvergenz in den Punkten der Kreisperipherie selbst läßt sich nichts allgemeines aussagen; es kann hier je nach der Natur der Reihen Konvergenz oder Divergenz stattfinden, auch in einem Teil der Peripheriepunkte Konvergenz, in einem andern Divergenz.

Als einfaches Beispiel führen wir die geometrische Reihe an:

$$S(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots.$$

Hier ergibt sich $\varrho = 1$ und der Konvergenzkreis ist also der Einheitskreis, worunter wir den Kreis verstehen, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist.

In diesem Fall findet auf dem Konvergenzkreis nirgends Konvergenz statt, da ja der absolute Wert aller Glieder $= 1$ ist, also nicht gegen Null konvergiert.

§ 112. Rechnen mit unendlichen Reihen.

1. Wir betrachten zwei unendliche Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern u_i, v_i, und setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ V_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen hier die ersten Glieder nicht mit u_1, v_1, sondern mit u_0, v_0, und verstehen unter U_n, V_n die Summe der $(n + 1)$ ersten Glieder, was besonders für die Multiplikation bequemer ist. Diese Reihen seien konvergent und U, V ihre Summen, also

$$\lim_{n=\infty} U_n = U, \quad \lim_{n=\infty} V_n = V.$$

Setzen wir

$$u_0 \pm v_0 = w_0, \quad u_1 \pm v_1 = w_1, \quad u_2 \pm v_2 = w_2, \cdots,$$

worin überall die oberen oder überall die unteren Zeichen stehen, und

$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n,$$

so ist

$$U_n \pm V_n = W_n.$$

Lassen wir hierin n ins Unendliche wachsen, so ergibt sich, daß auch W_n konvergiert, und daß, wenn der Grenzwert von W_n mit W bezeichnet wird,

$$W = U \pm V$$

ist. Damit ist bewiesen:

Man addiert oder subtrahiert zwei konvergente Reihen, indem man entsprechende Glieder addiert oder subtrahiert.

Der Wert der Reihe U wird nicht geändert, wenn wir beliebige Glieder mit dem Werte Null voranstellen oder einschieben. Daraus ergibt sich, daß man die Summe W auf sehr mannigfache Art bilden kann, indem man die Glieder u_n, v_n auf verschiedene Art einander zuordnet, z. B.

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + (v_3 + u_2) + (v_4 + u_3) + \cdots$$

oder

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + v_3 + (v_4 + u_2) + v_5 + \cdots.$$

2. Nicht ganz so einfach liegen die Dinge bei der Multiplikation. Es seien jetzt

$$(2)\qquad \begin{aligned} U &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \\ V &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \end{aligned}$$

zwei konvergente Reihen. Es seien a_i und b_i die absoluten Werte von u_i und v_i, und wir nehmen zunächst an, daß auch die Reihen

$$(3) \qquad \begin{aligned} A &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \\ B &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \end{aligned}$$

konvergent seien, daß also U und V unbedingt konvergent seien.

3. Wenn wir bei der Multiplikation von A und B so verfahren, als ob es sich um die Multiplikation zweier endlicher Polynome handle, so haben wir jedes Glied der einen Summe mit jedem der andern zu multiplizieren und dann wieder die Summe dieser Produkte zu nehmen. Alle diese Produkte sind aber von der Form $a_\mu b_\nu$. Wir fassen diese Produkte nach den Werten der Indexsumme $\mu + \nu$ in Gruppen zusammen und addieren zunächst die Produkte dieser Gruppen, d. h. wir bilden die Zahlen

$$(4) \qquad \begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_m &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \cdots + a_m b_0. \end{aligned}$$

Daraus bilden wir die Gesamtsumme

$$(5) \qquad C_m = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m,$$

und diese Summe wollen wir mit dem Werte des Produktes $A_n B_n$ vergleichen.

In dem Produkt $A_n B_n$ kommen alle die Glieder $a_\mu b_\nu$ vor, in denen gleichzeitig $\mu \lesseqgtr n$, $\nu \lesseqgtr n$ ist, aber keine anderen Glieder.

In C_m kommen alle die Glieder $a_\mu b_\nu$ vor, in denen $\mu + \nu \lesseqgtr m$ ist und keine anderen. Nehmen wir also $m = 2n$ an, so enthält C_m gewiß alle Glieder $a_\mu b_\nu$, in denen $\mu \lesseqgtr n$, $\nu \lesseqgtr n$ ist, aber außerdem noch andere Glieder, in denen μ oder ν größer als n ist. Da nun alle a_μ, b_ν positiv sind, so folgt

$$(6) \qquad A_n B_n < C_{2n}.$$

Andererseits kommen unter den Gliedern $a_\mu b_\nu$ des Produktes $A_n B_n$ neben anderen alle die vor, in denen $\mu + \nu \lesseqgtr n$ ist, denn in keinem dieser Glieder kann μ oder ν größer als n sein. Dies aber sind die Glieder der Summe C_n, und daraus folgt

$$C_n < A_n B_n$$

und folglich auch, wenn wir n durch $2n$ ersetzen,

$$(7) \qquad C_{2n} < A_{2n} B_{2n};$$

aus (6) und (7) aber folgt

$$A_n B_n < C_{2n} < A_{2n} B_{2n}.$$

Da nun nach Voraussetzung $A_n B_n$ und $A_{2n} B_{2n}$ denselben Grenzwert AB haben, so muß auch C_{2n} und folglich auch C_n denselben Grenzwert haben.

Es ist also die Reihe

$$C = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

konvergent und zugleich

$$C = AB. \tag{8}$$

4. Für das Folgende ist noch zu bemerken, daß die Differenz

$$D_n = C_n - A_n B_n$$

eine Summe von positiven Produkten $a_\mu b_\nu$ ist, und daß D_n für unendlich wachsendes n den Grenzwert Null hat.

5. Wir bilden jetzt aus den Reihen U, V eine neue Reihe W nach demselben Gesetz, nach dem wir aus A und B die Reihe C abgeleitet haben, d. h. wir setzen

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ w_m &= u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \cdots + u_m v_0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$W_m = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_m.$$

Wir bilden nun die Differenz

$$\Delta_n = W_n - U_n V_n.$$

Diese Differenz weicht nur in der Bezeichnung von D_n ab. Sie besteht aus einer Summe von Produkten $u_\mu v_\nu$, und wenn man diese durch ihre absoluten Werte $a_\mu b_\nu$ ersetzt, so geht Δ_n in D_n über. Demnach haben wir nach dem Satze, daß der absolute Wert einer Summe nicht größer ist, als die Summe der absoluten Werte,

$$|\Delta_n| \overline{\gtrless} D_n$$

und mithin hat auch $|\Delta_n|$ und folglich auch Δ_n den Grenzwert Null. Daraus folgt aber

$$W = UV.$$

Es ist also auch W konvergent. Es ist aber

$$|w_n| \overline{\gtrless} a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = c_n,$$

und da die Reihe C konvergent ist, so ist auch die Reihe der $|w_i|$

konvergent, d. h. die Reihe W ist unbedingt konvergent, und wir haben den Satz:

Wenn man aus zwei unbedingt konvergenten Reihen U, V nach den Formeln (9) eine Reihe W bildet, so ist auch diese unbedingt konvergent, und es ist $W = UV$.

6. Der Satz von Abel (§ 109) gestattet eine Erweiterung des zuletzt bewiesenen Theorems, bei der zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz nicht mehr unterschieden zu werden braucht:

Wenn U, V zwei konvergente Reihen sind, und die daraus nach den Formeln (9) abgeleitete Reihe W gleichfalls konvergiert, so ist $W = UV$.

Wenn nämlich r irgend einen positiven echten Bruch bedeutet, und U und V konvergent sind, so sind

$$U(r) = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + r^3u_3 + \cdots$$
$$V(r) = v_0 + rv_1 + r^2v_2 + r^3v_3 + \cdots$$

unbedingt konvergent (§ 111) und die daraus nach (9) abgeleitete Reihe

$$W(r) = w_0 + rw_1 + r^2w_2 + r^3w_3 + \cdots$$

ist nach Nr. 5 unbedingt konvergent, und es ist

$$U(r)\,V(r) = W(r). \tag{10}$$

Setzen wir $r = 1$, so gehen $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$ in U, V, W über, und wenn also diese letzten Reihen konvergieren, so ist nach dem Abelschen Satze

$$\operatorname*{Lim}_{r=1} U(r) = U, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} V(r) = V, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} W(r) = W,$$

und wenn man also in (10) r in 1 übergehen läßt, so folgt

$$UV = W,$$

wie bewiesen werden sollte.

Wir haben in § 109 den Abelschen Satz allerdings nur unter der Voraussetzung reeller Koeffizienten bewiesen. Man braucht ihn aber bei komplexen Koeffizienten nur auf den reellen und imaginären Teil einzeln anzuwenden, um auch für diesen Fall seine Richtigkeit zu erkennen.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

§ 113. Reihe für die Exponentialfunktion.

1. Wir wenden die allgemeinen Gesetze nun auf einzelne besondere Reihen an, und betrachten zunächst die Reihe

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \tag{1}$$

von der wir schon in § 111, 2. nachgewiesen haben, daß sie für jedes reelle oder komplexe z unbedingt konvergiert. Für den speziellen Wert $z = 1$ haben wir die Reihe schon im § 106 untersucht und deren Wert

$$E(1) = e = 2{,}7182818\ldots \tag{2}$$

gefunden. Ebenso erhalten wir unmittelbar aus der Definition

$$E(0) = 1.$$

2. Der letzten Formel müssen wir aber eine noch etwas schärfere Fassung geben. Bezeichnen wir mit r den absoluten Wert von z, so ist

$$|E(z) - 1| \leqq \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots,$$

und da

$$\frac{1}{2!} < \frac{1}{1!}, \quad \frac{1}{3!} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{3!}, \cdots$$

ist, so folgt

$$|E(z) - 1| < r\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right) = rE(r).$$

Wir sehen hieraus, daß der absolute Wert von $E(z) - 1$ unter jeden Zahlenwert heruntersinkt, wenn der absolute Wert von z klein genug wird, d. h.:

$E(z)$ geht **stetig** in den Wert 1 über, wenn z stetig in den Wert 0 übergeht,

oder durch eine Formel ausgedrückt:

$$\lim_{z=0} E(z) = 1. \tag{2}$$

3. Eine weitere Eigenschaft der Reihe $E(z)$ ergibt uns die Multiplikationsregel § 112, 5.

Verstehen wir unter x und y jetzt irgend zwei reelle oder komplexe Zahlen und setzen für jedes positive n

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n = \frac{y^n}{n!}, \quad u_0 = v_0 = 1,$$

so wird nach § 112. (9)

$$w_n = \frac{y^n}{n!} + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\frac{x}{1!} + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

und da nun

$$B_k^{(n)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

ein Binomialkoeffizient ist (§ 55), so folgt hieraus:

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{n!}\left(y^n + B_1^{(n)} y^{n-1}x + B_2^{(n-1)} y^{n-2}x^2 + \cdots + x^n\right) \\ &= \frac{1}{n!}(x+y)^n. \end{aligned}$$

Die Reihe W ist also nichts anderes als $E(x+y)$, und es ergibt sich

$$E(x+y) = E(x)\,E(y). \tag{3}$$

Hierin können x, y reell oder imaginär sein. Nehmen wir aber zunächst x, y reell an, so sind, wie wir in § 18 und § 34 gesehen haben, die Gleichungen (1), (2), (3) die charakteristischen Merkmale, durch die die Potenzen e^x erklärt waren, und wir haben also für **reelle Werte** von x das Resultat

$$e^x = E(x).$$

Da wir die Potenzen mit imaginären Exponenten bisher noch nicht erklärt haben, so steht es uns frei, jetzt auch für ein imaginäres z

$$e^z = E(z) \tag{4}$$

zu setzen, und dadurch die Potenzen von e auch für ein komplexes z zu erklären. Das so definierte e^z oder $E(z)$ heißt die **Exponentialfunktion**. Die in (3) ausgedrückte fundamentale Eigenschaft der Potenzen bleibt dann auch für komplexe Exponenten x, y bestehen.

4. Die Exponentialfunktion e^z ist der Grenzwert von

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für ein unendlich wachsendes n.

Nehmen wir, um dies zu beweisen, zunächst n als positive ganze Zahl an, und entwickeln nach dem binomischen Satze, so erhalten wir (§ 106)

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Wir zerlegen diesen Ausdruck in zwei Bestandteile

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

worin, wenn $m < n$ ist,

$$Z_1 = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{z^m}{m!},$$

$$Z_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Ist nun r der absolute Wert von z, und $k \gtreqless n$, so ist

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!} < \frac{r^k}{k!},$$

und wenn wir dies auf die einzelnen Glieder von Z_2 anwenden, so ergibt sich

$$|Z_2| < \frac{r^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{r^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{r^n}{n!}.$$

Setzen wir daher allgemein

$$E_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!},$$

so folgt:

$$|Z_2| < E_n(r) - E_m(r) < E(r) - E_m(r).$$

Die Koeffizienten in Z_1:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right),\ \cdots,\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

lassen sich nun, wenn man m festhält und n genügend wachsen läßt, dem Werte 1 beliebig nahe bringen, und folglich kann man durch genügende Vergrößerung von n den absoluten Wert $|Z_1 - E_m(z)|$ kleiner als eine beliebige Größe $\varDelta$ machen.

Hiernach ist

$$Z - E(z) = (Z_1 - E_m(z)) - (E(z) - E_m(z)) + Z_2$$

und folglich für die absoluten Werte

$$|Z - E(z)| \overline{\gtrless} |Z_1 - E_m(z)| + |E(z) - E_m(z)| + E(r) - E_m(r).$$

Man nehme nun zunächst m so groß, daß

$$|E(z) - E_m(z)| \quad \text{und} \quad E(r) - E_m(r)$$

beide kleiner werden als eine beliebige Größe Δ, was wegen der Konvergenz von $E(z)$ möglich ist, und darauf n so groß, daß auch $|Z_1 - E_m(z)| < \Delta$ werde, und damit wird

$$|Z - E(z)| \overline{\gtrless} 3\Delta.$$

Man kann also n so groß annehmen, daß die Differenz $Z - E(z)$ dem absoluten Werte nach kleiner als eine beliebig kleine Größe wird, und damit ist der Satz 4. für ein beliebiges z bewiesen:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z,$$

allerdings zunächst nur für ein ganzzahlig wachsendes n.

5. Setzen wir aber

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{n+\nu}$$

und verstehen unter n eine ganze Zahl, unter ν einen echten Bruch, so ist

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^\nu \frac{(n+\nu+z)^n}{(n+\nu)^n}$$

$$= \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^\nu \left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^{-n}.$$

Lassen wir hierin n ganzzahlig ins Unendliche wachsen, so ist

$$\operatorname{Lim} \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^\nu = 1, \quad \operatorname{Lim} \left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n = e^{\nu+z}, \quad \operatorname{Lim} \left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^n = e^\nu,$$

und folglich ist der Grenzwert von Z auch hier gleich e^z.

Ähnlich wie in § 106, 6. läßt sich zeigen, daß sich derselbe Grenzwert für Z ergibt, wenn n negativ unendlich groß wird.

6. Wenn wir $z = ix$ setzen, und x als reell voraussetzen, so ergibt sich mit Rücksicht auf

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \cdots :$$

$$E(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots,$$

und wir können setzen:

$$\text{(6)} \qquad E(ix) = A(x) + iB(x),$$

worin

$$A(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$
(7)
$$B(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

zwei immer und unbedingt konvergente Reihen sind.

Zugleich ist

$$(8) \qquad A(x) + iB(x) = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n.$$

Aus dem Theorem (3) ergibt sich, wenn x und y irgend zwei reelle Größen sind,

$$(A(x) + iB(x))(A(y) + iB(y)) = A(x+y) + iB(x+y)$$

und durch Trennung des reellen vom imaginären Teil:

$$A(x+y) = A(x)A(y) - B(x)B(y),$$
$$B(x+y) = B(x)A(y) + B(y)A(x).$$

Diese Formeln stimmen, wie man sieht, genau überein mit den Additionsformeln der trigonometrischen Funktionen $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ (§ 47, 3.). Der tiefere Grund dieser Übereinstimmung ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen.

§ 114. Die trigonometrischen Funktionen als Reihensummen.

1. Um den Zusammenhang dieser Entwicklungen mit den trigonometrischen Funktionen zu erkennen, ist die folgende Betrachtung voranzuschicken.

Es sei AB ein Kreisbogen mit dem Radius gleich der Längeneinheit und dem Winkel α, den wir in Bogenmaß messen, sodaß also auch die Länge des Bogens AB gleich α ist. Wir fällen von B ein Perpendikel BE auf CA und errichten in A die Senkrechte AD bis zum Schnitt D mit dem Radius CB. Dann ist nach Sätzen der Trigonometrie

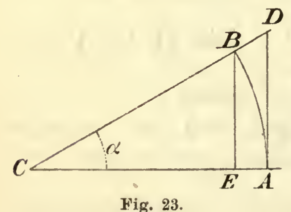


Fig. 23.

$$\overline{BE} = \sin\alpha, \quad \overline{AD} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \overline{CE} = \cos\alpha.$$

Der Flächeninhalt des Sektors CAB ist aber, wie die Figur zeigt, kleiner als der des Dreiecks CAD und größer als der des Dreiecks CEB, und es ist der

$$\text{Flächeninhalt } CAB = \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{,,} \qquad CAD = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\text{,,} \qquad CEB = \tfrac{1}{2}\sin\alpha,$$

woraus sich die Ungleichung ergibt:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

und hieraus kann man, da $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ist, ableiten

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1\cdot$$

Da nun $\cos\alpha$ der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn α hinlänglich verkleinert wird, so folgt daraus:

2. Der Quotient $\sin\alpha : \alpha$ nähert sich der Grenze 1, wenn α sich dem Werte 0 nähert.

Da $\cos\alpha$ für $\alpha = 0$ in 1 übergeht, so hat auch $\operatorname{tg}\alpha/\alpha$ den Grenzwert 1:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \quad \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1. \tag{2}$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ für kleine Werte von α dem Bogen α nahezu gleich werden.

Der $\cos\alpha$ ist größer als $\frac{1}{2}$, wenn der Winkel α kleiner als $\pi/3$ ist, denn $\cos\alpha$ wächst, wenn α abnimmt, und ist $= \frac{1}{2}$ für $\alpha = \pi/3$ (für den Winkel des gleichseitigen Dreiecks).

Es ist also, wenn $\alpha < \frac{\pi}{3}$ ist, nach (1)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 2\sin\alpha < 2\alpha. \tag{3}$$

3. Nach der Moivreschen Formel (§ 47, 8.) ist, wenn φ einen beliebigen Winkel, n eine ganze Zahl bedeutet,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

und daraus ergibt sich, wenn wir $n\varphi = x$ setzen:

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n\cdot \tag{4}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist also von n unabhängig, und wir wollen sehen, was daraus wird, wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen.

Wir setzen zunächst

$$\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n \tag{5}$$

und betrachten jeden der beiden Faktoren besonders. Wenn wir in der trigonometrischen Formel

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{6}$$

$\alpha = x : 2n$ setzen, so erhalten wir

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2n}\right)^n,$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$2n\sin^2\frac{x}{2n} = \xi,$$

dann ergibt sich durch Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = \sigma + \varrho,$$

worin, wenn m irgend eine ganze Zahl $< n$ bedeutet,

$$\sigma = 1 - \xi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\xi^2}{2!} - \cdots \pm \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{\xi^m}{m!},$$

$$\varrho = \pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} \mp \cdots$$

$$\pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{\xi^n}{n!}$$

ist. Die Vorzeichen $+$ und $-$ wechseln in σ und ϱ regelmäßig ab. Es ist aber nach (1)

$$\xi < \frac{x^2}{2n},$$

also um so mehr auch $\xi < x^2$, und wenn n unbegrenzt wächst, so sinkt ξ unter jeden positiven Wert herunter. Hieraus folgt, daß σ bei festgehaltenem m und unendlich wachsendem n den Grenzwert 1 hat. Der zweite Teil ϱ dagegen ist dem absoluten Werte nach kleiner als

$$\frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = E_n(x^2) - E_m(x^2)$$

und wird also wegen der Konvergenz der Reihe $E(x)$ kleiner als jede noch so kleine Zahl, wenn m und n beide hinlänglich groß sind.

Demnach ist der Grenzwert von $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ gleich 1.

4. Ebenso behandeln wir nun den zweiten Faktor des Ausdrucks (5)

$$\left(1 + i\,\mathrm{tg}\frac{x}{n}\right)^n,$$

in dem wir zur Abkürzung

$$n\,\mathrm{tg}\frac{x}{n} = t$$

setzen und zunächst x als positiv voraussetzen. Wir erhalten wieder nach dem binomischen Satze, wenn $m < n$ ist

$$\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n = S + R,$$

worin

$$S = 1 + it + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{(it)^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{(it)^m}{m!},$$

$$R = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{(it)^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{(it)^n}{n!}.$$

Nach Nr. 1. hat aber $\operatorname{tg}\frac{x}{n}\Big/\frac{x}{n}$ für ein unendlich wachsendes n den Grenzwert 1 und folglich t den Grenzwert x; und ferner ist nach (3) $t < 2x$, wenigstens wenn $n > 3x/\pi$ ist.

Hieraus ergibt sich wie früher, daß

(7) $$|R| < E_n(2x) - E_m(2x),$$

und daß S dem Werte

(8) $$1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^m}{m!}$$

beliebig nahe kommt, wenn m beliebig und n hinlänglich groß angenommen wird.

Die Summe (8) kann aber ihrerseits dadurch, daß m hinlänglich groß genommen wird, dem Werte $A(x) + iB(x)$ (§ 113, 6.) beliebig nahe gebracht werden, und da überdies durch die gleiche Annahme $|R|$ beliebig klein gemacht werden kann, so folgt

$$\operatorname{Lim}\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n = A(x) + iB(x).$$

Daraus ergibt sich nach (4) und (5):

$$\cos x + i\sin x = A(x) + iB(x),$$
$$\cos x = A(x), \quad \sin x = B(x).$$

Es sind also die trigonometrischen Funktionen $\cos x$, $\sin x$ die Summen der unendlichen Reihen:

(9) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Nach diesen Formeln kann man $\cos x$ und $\sin x$ berechnen. Die Reihen sind aber um so besser konvergent, je kleiner x ist, und man wendet sie daher zweckmäßig nur für kleine Werte x zur Berechnung von $\cos x$ und $\sin x$ an, während man für größere Werte die Additionsformeln benutzt.

Zu beachten ist aber bei diesen Formeln, daß der Winkel x nicht etwa in Graden, sondern notwendig im Bogenmaß gemessen sein muß.

Die Zahl $\pi = 3{,}141592\cdots$ kann dann definiert werden als die kleinste positive Zahl x, für die die Sinusreihe verschwindet.

Nach § 113, (6) erhält man für die Potenz e^{ix} mit imaginärem Exponenten

$$(10)\qquad \begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x, \end{aligned}$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addiert und subtrahiert, so erhält man die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ durch die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten ausgedrückt:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(12)\qquad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = +1.$$

Um eine komplexe Größe $z = x + yi$ durch den absoluten Wert r und die Phase ϑ auszudrücken, können wir uns jetzt statt des Ausdrucks:

$$z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

des kürzeren:

$$z = re^{i\vartheta}$$

bedienen.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

§ 115. Die Binomialreihe für negative ganzzahlige Exponenten.

1. Wir haben in § 55 die Binomialformel für einen positiven ganzzahligen Exponenten abgeleitet. Darnach war, wenn μ eine natürliche Zahl ist:

$$(1) \qquad (1+z)^\mu = B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots,$$

worin

$$(2) \qquad \begin{gathered} B_0^{(\mu)} = 1, \quad B_1^{(\mu)} = \mu, \quad B_2^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}, \\ B_n^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \end{gathered}$$

die Binomialkoeffizienten waren.

Der Ausdruck $B_m^{(\mu)}$ behält aber auch noch eine Bedeutung, wenn μ nicht eine ganze positive Zahl ist und selbst wenn μ komplex ist. Nur wird dann keiner dieser Ausdrücke $= 0$ und die Summe auf der rechten Seite der Formel (1) bricht nicht ab. Ihre Glieder bilden eine unendliche Reihe.

Sehen wir zu, ob sie eine konvergente Summe hat.

2. Es sei z komplex und r der absolute Wert von z. Das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ zum n^{ten} Gliede der Reihe (1) ist

$$B_n^{(\mu)} z^n : B_{n-1}^{(\mu)} z^{n-1} = \frac{\mu - n + 1}{n} z = \left(\frac{\mu+1}{n} - 1\right) z,$$

und der absolute Wert dieses Verhältnisses

$$\left|\frac{\mu+1}{n} - 1\right| r$$

hat für ein unendliches n den Grenzwert r. Demnach konvergiert die Reihe (1) unbedingt, wenn $r < 1$ ist, und nicht unbedingt, wenn $r > 1$ ist (§ 105, 4.).

Die Reihe (1) hat also in allen Fällen, außer wenn μ eine positive Zahl ist, einen Konvergenzkreis mit dem Radius 1 (§ 111, 4. 6.).

3. Wir haben in § 55 (10) eine Formel für die Binomialkoeffizienten kennen gelernt, die wir jetzt in etwas abgeänderter Bezeichnung so darstellen:

$$(3) \qquad B_n^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots + B_n^{(\mu)} B_0^{(\nu)}.$$

Dort haben wir diese Formel allerdings nur unter der Voraussetzung von ganzzahligen μ, ν abgeleitet. Wir können aber leicht aus dem Ausdruck (2) die Formel allgemein beweisen. Denn es ist nach (2)

$$B_0^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)}, \quad B_1^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)},$$

die Formel (3) also richtig für $n = 0$, $n = 1$. Wir nehmen sie als richtig an für irgend ein n und leiten sie daraus ab für $n + 1$. Dazu führt die Formel

$$(4) \qquad (\mu - n) B_n^{(\mu)} = (n + 1) B_{n+1}^{(\mu)},$$

die sich aus der Definition (2) unmittelbar ergibt.

Wir multiplizieren also nun die Formel (3) mit $\mu + \nu - n$, und zerlegen diesen Multiplikator in den einzelnen Termen der rechten Seite in der Weise:

$$\begin{aligned} \mu + \nu - n &= (\nu - n) + \mu, \\ &= (\nu - n + 1) + (\mu - 1), \\ &= (\nu - n + 2) + (\mu - 2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich

$$(\mu + \nu - n) B_n^{(\mu+\nu)} =$$

$$B_0^{(\mu)} (\nu - n) B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} (\nu - n + 1) B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} (\nu - n + 2) B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots$$
$$+ \mu B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + (\mu - 1) B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots$$

oder mit Benutzung der Formel (4)

$$(n + 1) B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = (n + 1) B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} + n B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + (n - 1) B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots$$
$$+ \quad B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + \qquad 2 B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots.$$

Wenn man hier die untereinanderstehenden Terme addiert, so läßt sich der Faktor $(n + 1)$ wegheben, und es folgt:

$$B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots,$$

was nun in der Tat nichts anderes ist, als die Formel (3), wenn darin n in $n + 1$ verwandelt wird.

4. Wir wollen nun die Summe der Reihe (1), deren Wert im allgemeinen noch unbekannt ist, mit $\varphi(\mu)$ bezeichnen, und nun multiplizieren wir zwei solche Reihen:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\varphi(\mu) &= B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + B_3^{(\mu)}z^3 + \cdots,\\ \varphi(\nu) &= B_0^{(\nu)} + B_1^{(\nu)}z + B_2^{(\nu)}z^2 + B_3^{(\nu)}z^3 + \cdots\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, daß $|z| < 1$ ist, nach der Vorschrift des § 112, 5. und erhalten für die Glieder der das Produkt darstellenden Reihe:

$$\begin{aligned}&B_0^{(\mu)}B_0^{(\nu)},\\ &(B_0^{(\mu)}B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}B_0^{(\nu)})z,\\ &(B_0^{(\mu)}B_2^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}B_1^{(\nu)} + B_2^{(\mu)}B_0^{(\nu)})z^2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

also nach der Formel (3):

$$(6)\qquad \varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu).$$

5. Dies ist die charakteristische Eigenschaft der Potenzen, aus der man, wie früher, die Bedeutung von $\varphi(\mu)$ ableiten könnte. Ist z. B. μ eine positive ganze Zahl und $\nu = -\mu$, so ist nach dem binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\mu) = (1 + z)^\mu,$$

und es folgt aus (6)

$$\varphi(-\mu) = \frac{1}{(1+z)^\mu} = (1 + z)^{-\mu}.$$

Der binomische Lehrsatz bleibt also richtig auch für negative ganzzahlige Exponenten, wenn der absolute Wert von z kleiner als 1 ist. Wir haben z. B. für $\mu = -1, -2, -3$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots,\\ \frac{1}{(1+z)^2} &= 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots,\\ \frac{1}{(1+z)^3} &= 1 - \frac{2\cdot 3}{2}z + \frac{3\cdot 4}{2}z^2 - \frac{4\cdot 5}{2}z^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Ist μ gebrochen oder irrational oder selbst komplex, so behält $\varphi(\mu)$ immer seine Bedeutung, die gleichfalls unter den Potenzen zu suchen ist; da aber diese Potenzen mehrdeutig sind, so ist die Bedeutung noch festzustellen.

Die genaue Untersuchung der Binomialreihe rührt von Abel her, der ihre Bedeutung allgemein, auch für komplexe μ, klar gestellt hat[1]).

Wir wollen uns hier der Einfachheit halber auf den Fall eines reellen μ beschränken.

1) N. H. Abel, Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

(1826). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 71.

§ 116. Stetigkeit der Binomialreihe.

1. Man versteht unter einer Funktion $\Phi(x)$ eines Argumentes x einen Ausdruck, dessen Zahlenwert durch irgend eine Rechenvorschrift bestimmt ist, wenn der Wert des Argumentes x beliebig gegeben ist. Da das Argument x verschiedener Werte fähig ist, so wird es auch die Veränderliche oder Variable genannt. Die Funktionen und das Argument können auch komplexe Werte erhalten. Beispiele solcher Funktionen sind die ganzen Funktionen $f(x)$, die wir im elften Abschnitt betrachtet haben, ferner die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ oder die Exponentialfunktion e^x. Man benutzt auch Funktionen von mehreren Veränderlichen. Dahin gehören die symmetrischen Funktionen des § 64 oder die Funktionen X, Y in § 66.

2. Eine Funktion $\Phi(x)$ heißt stetig, wenn sie die Eigenschaft hat, daß der absolute Wert ihrer Aenderung $\Phi(x') - \Phi(x)$ unter jede beliebige Grenze Δ heruntersinkt, wenn die Änderung $x' - x$, dem absoluten Werte nach, unter einer hinlänglich kleinen Größe δ liegt. Man drückt dies kürzer auch so aus:

Eine stetige Funktion ist eine solche, bei der einer unendlich kleinen Änderung des Argumentes eine unendlich kleine Änderung der Funktion entspricht.

Plötzliche, sprungweise Änderungen sind also bei einer stetigen Funktion ausgeschlossen.

3. Sind X und Y zwei stetige Funktionen des Argumentes x, so sind auch die Verbindungen $X + Y$, $X - Y$, XY stetige Funktionen. Denn bedeuten α und β die Änderungen von X und Y, so sind die Änderungen jener drei Verbindungen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha Y + \beta X + \alpha\beta$, und diese werden alle drei unendlich klein, wenn α und β unendlich klein sind.

Durch eine wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich, daß eine ganze Funktion von stetigen Funktionen immer eine stetige Funktion ist.

4. Wir bezeichnen mit $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ die Glieder einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen des Argumentes x, die ihrem absoluten Werte nach alle unter einer bestimmten, von x unabhängigen Grenze g bleiben. Wenn dann r ein positiver echter Bruch ist, so ist

$$U = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + r^3 u_3 + \cdots,$$

wie wir gesehen haben, eine unbedingt konvergente unendliche Reihe, deren Summe U eine Funktion von x ist. Es soll bewiesen werden, daß es eine stetige Funktion von x ist.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine positive ganze Zahl n an und setzen:

$$U_n = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + \cdots + r^n u_n,$$
$$R_n = r^{n+1} u_{n+1} + r^{n+2} u_{n+2} + \cdots,$$
$$U = U_n + R_n.$$

Dann ist U_n nach Nr. 3. eine stetige Funktion von x, R_n aber ist eine unendliche Reihe, deren Summe der Ungleichung genügt:

$$|R_n| < g(r^{n+1} + r^{n+2} + r^{n+3} + \cdots) = \frac{g r^{n+1}}{1-r}.$$

Da nun r ein echter Bruch ist, so können wir n so groß annehmen, daß $|R_n|$ kleiner als eine beliebig kleine Grösse $\varDelta$ wird, und dann ist auch die Änderung von R_n bei einer Änderung von x dem absoluten Werte nach kleiner als $2\varDelta$, denn es ist, wenn R_n' den veränderten Wert von R_n bedeutet,

$$|R_n| < \varDelta, \quad |R_n'| < \varDelta,$$
$$|R_n' - R_n| < |R_n| + |R_n'| < 2\varDelta.$$

Da nun U_n eine stetige Funktion ist, so kann man die Änderung von x wieder so klein nehmen, daß die Änderung $U_n' - U_n$ gleichfalls kleiner als $\varDelta$ wird, und dann wird die Änderung von U kleiner als $3\varDelta$, d. h. beliebig klein. Damit ist die Stetigkeit von U als Funktion von x erwiesen.

5. Wir können U auch als Funktion von r betrachten, und auch als solche ist sie stetig, so lange r kleiner bleibt als ein angebbarer echter Bruch, und wir schließen, daß eine Potenzreihe

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

innerhalb ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion von z ist. Denn ist r der absolute Wert von z, ϱ der Radius des Konvergenzkreises, und $r < \varrho$, so kann man einen Wert ϱ_0 zwischen r und ϱ finden, der der Bedingung genügt:

$$\sqrt{r\varrho} < \varrho_0 < \varrho,$$

und da alsdann

$$\frac{\varrho r}{\varrho_0} < \varrho_0 < \varrho$$

ist, so konvergiert die Reihe

$$c_0 + c_1 \frac{\varrho r}{\varrho_0} + c_2 \left(\frac{\varrho r}{\varrho_0}\right)^2 + \cdots,$$

und es ist

$$\lim_{n=\infty} \left| c_n \left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n \right| = 0.$$

Für das allgemeine Glied $c_n z^n$ der Reihe $S(z)$ können wir setzen:

$$c_n \left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^n,$$

und wenn wir also in dem Satze 4. r durch ϱ_0/ϱ, u_n durch $c_n(\varrho z)^n/\varrho_0^n$ ersetzen, so sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, und es folgt:

Die Potenzreihe $S(z)$ ist im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion von z.

Hiernach sind auch z. B. die Exponentialfunktion e^z und die trigonometrischen Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ als Potenzreihen stetige Funktionen von z. Der Abelsche Satz § 109 hat den Inhalt, daß, wenn die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

selbst konvergiert, $U = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + \cdots$ auch für $r = 1$ eine stetige Funktion von r ist, wenn man die Veränderung von r auf eine Verkleinerung beschränkt.

6. Die Binomialreihe

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + B_3^{(\mu)}z^3 + \cdots$$

befindet sich, so lange der absolute Wert von z kleiner als 1 ist, in dem Falle von Nr. 4., und da die Binomialkoeffizienten $B_n^{(\mu)}$ als ganze Funktionen von μ stetig sind, so ist $\varphi(\mu)$ eine stetige Funktion von μ.

Wir wollen nun, wie schon gesagt, zwar μ als reell voraussetzen, aber komplexe Werte von z nicht ausschließen.

§ 117. Summe der Binomialreihe.

1. Wenn $z = x + yi$ komplex ist, so können wir setzen

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

worin r positiv ist und ϑ einen Winkel bedeutet, der nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Um ihn genau zu bestimmen, können wir festsetzen, daß ϑ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen soll:

$$(1) \qquad -\pi < \vartheta \leqq \pi.$$

Außerdem nehmen wir in unserer folgenden Betrachtung

$$(2) \qquad r < 1$$

an. Die unter diesen Voraussetzungen konvergente Binomialreihe

$$(3) \qquad \varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + B_3^{(\mu)}z^3 + \cdots$$

hat im allgemeinen gleichfalls komplexe Werte, und da

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

ist, und die $B_n^{(\mu)}$ reell sind, so ergibt sich, wenn wir

$$\varphi(\mu) = X + Yi$$

setzen:

$$(4)\quad \begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} r \cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)} r \sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

2. Wir setzen

$$X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta,$$
$$Z = X + Yi = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

worin R reell und positiv, θ aber nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

Es handelt sich um die Bestimmung von R und θ als Funktionen von μ. Um ihre Abhängigkeit von μ anzudeuten, setzen wir auch $R = R(\mu)$, $\theta = \theta(\mu)$ und bemerken, daß R, $\cos\theta$, $\sin\theta$ stetige Funktionen von μ sind.

Wir können auch $\theta(\mu)$ als stetige Funktion von μ ansehen. Dann aber haben wir es nicht mehr in der Hand, dem $\theta(\mu)$ ein beliebiges Intervall von der Größe 2π zuzuweisen, sondern, wenn für irgend einen Wert von μ, z. B. für $\mu = 0$ ein bestimmtes Intervall für $\theta(\mu)$ festgesetzt ist, so kann bei stetiger Veränderung von μ und $\theta(\mu)$ der Winkel $\theta(\mu)$ aus diesem Intervall heraustreten. In diesem Sinne wollen wir hier $\theta(\mu)$ nehmen, und darunter also eine stetige Funktion von μ verstehen.

Für $\mu = 0$ ergibt sich $X = 1$, $Y = 0$ und folglich

$$\cos\theta(0) = 1, \quad \sin\theta(0) = 0.$$

Es ist daher $\theta(0)$ ein Vielfaches von 2π, und wir können also, um $\theta(\mu)$ vollständig zu bestimmen,

$$\theta(0) = 0$$

annehmen. Für $R(0)$ ergibt sich der Wert 1.

3. Zur Bestimmung von R und θ führt nun die Fundamentalformel § 115, (6):

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu),$$

worin wir unter μ und ν irgend zwei reelle Zahlen verstehen.

Darnach erhalten wir bei der Benutzung der Moivreschen Formel:

$$(5)\quad \begin{aligned} &R(\mu)\,R(\nu)\left[\cos(\theta(\mu) + \theta(\nu)) + i\sin(\theta(\mu) + \theta(\nu))\right] \\ &\quad = R(\mu + \nu)\left[\cos\theta(\mu + \nu) + i\sin\theta(\mu + \nu)\right]. \end{aligned}$$

Da ein Winkel durch die Werte des Sinus und des Kosinus bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist, so folgt hieraus

$$(6)\qquad \begin{aligned} R(\mu+\nu) &= R(\mu)\,R(\nu),\\ \theta(\mu+\nu) &= \theta(\mu)+\theta(\nu). \end{aligned}$$

In der zweiten dieser Formeln könnte nach (5) noch ein Vielfaches von 2π hinzugefügt werden. Da aber $\theta(\mu)$ stetig ist, und dieses Vielfache sich nur sprungweise ändern könnte, so ist es von μ und ν unabhängig und ergibt sich gleich Null, wenn man $\nu = 0$ setzt.

4. Aus der ersten Formel (6) ergibt sich zunächst die Bedeutung von $R(\mu)$ ganz wie in § 33. Es folgt nämlich durch wiederholte Anwendung dieser Formel, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$R(n\mu) = R(\mu)^n,$$

also für $\mu = 1$:

$$R(n) = R(1)^n$$

und für $\mu = m/n$:

$$R(m) = \left[R\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n;$$

folglich:

$$R\left(\frac{m}{n}\right) = [R(1)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{R(1)^m},$$

wenn darunter der einzige positive Wert der n^{ten} Wurzel verstanden wird. Es ergibt sich ferner, wenn man in (6) $\nu = 0$ setzt, $R(0) = 1$, und für $\nu = -\mu$

$$R(-\mu) = \frac{1}{R(\mu)}.$$

Da nun $R(\mu)$ eine stetige Funktion von μ ist, so gilt auch für irrationale positive und negative μ dasselbe Resultat:

$$(7)\qquad R(\mu) = R(1)^\mu,$$

worunter, wie in § 33, der einzige reelle positive Wert der μ^{ten} Potenz, der positiven Größe $R(1)$ zu verstehen ist.

5. In der gleichen Weise ergibt sich aus der zweiten Formel (6):

$$\theta(\mu+\nu) = \theta(\mu)+\theta(\nu)$$

durch wiederholte Anwendung:

$$\theta(n\mu) = n\theta(\mu),$$

also für $\mu = 1$:

$$\theta(n) = n\theta(1)$$

und für $\mu = m/n$:

$$\theta(m) = n\theta\left(\frac{m}{n}\right) = m\theta(1),$$

also zunächst für ein rationales μ und dann wegen der Stetigkeit auch für jedes irrationale:

$$\theta(\mu) = \mu\theta(1),$$

und es bleibt noch übrig, $R(1)$ und $\theta(1)$ zu bestimmen, die noch von z, d. h. von r und ϑ abhängen.

6. Zur Bestimmung von $R(1)$ und $\theta(1)$ haben wir aus (4) die beiden Gleichungen:

$$R(1)\cos\theta(1) = 1 + r\cos\vartheta,$$
$$R(1)\sin\theta(1) = r\sin\vartheta,$$

woraus zunächst, da $R(1)$ positiv sein muß, durch Quadrieren und Addieren

$$R(1) = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} \tag{8}$$

folgt, mit positivem Zeichen der Quadratwurzel.

Es folgt ferner durch Division der beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\theta(1) = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}.$$

Ist die Tangente eines Winkels gegeben, so ist damit der Winkel aber nur bis auf ein Vielfaches von π bestimmt, und zu jedem Wert der Tangente gibt es e i n e n und nur einen Winkel, der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Wir bestimmen also einen Winkel ω eindeutig durch die Bedingungen:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

wo die Grenzwerte $\pm\frac{1}{2}\pi$ dadurch ausgeschlossen sind, daß der Nenner $1 + r\cos\vartheta$ für ein echt gebrochenes r nicht Null sein kann. Dann ist

$$\theta(1) = \omega + h\pi,$$

worin h eine noch unbekannte ganze Zahl ist, die wir jetzt noch zu bestimmen haben.

7. Hierzu dient die Bemerkung, daß Y (Formel (4)) für echt gebrochene r eine stetige Funktion von r ist, die für $r = 0$ in den Wert 0 übergeht, und für $r = 0$ geht ω gleichfalls in 0, $R(1)$ in 1 über. Es ist aber

$$Y = R(1)^\mu \sin\mu(\omega + h\pi),$$

und für $r = 0$ ergibt sich hieraus

$$\sin\mu h\pi = 0.$$

Diese Gleichung soll aber für jedes b e l i e b i g e μ s t a t t f i n d e n und dies ist nur möglich, wenn die ganze Zahl $h = 0$ ist. Denn wäre sie nicht $= 0$, so brauchte man ja nur $\mu = 1 : 2h$ zu setzen, um $\sin\mu h\pi = 1$ zu erhalten. D e m n a c h ist $h = 0$, und wir haben damit

die Summe der Binomialreihe unter Voraussetzung eines echt gebrochenen r vollständig bestimmt. Es ist

$$(10)\qquad \varphi(\mu) = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}^{\mu}(\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega),$$

worin ω durch (9) bestimmt ist.

Wenn z reell ist, so ist $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ und folglich $\omega = 0$ (nach (9)) und es ist $z = x$ positiv für $\vartheta = 0$, negativ für $\vartheta = \pi$, folglich $x = r\cos\vartheta$, $x^2 = r^2$, also ergibt (10) für diesen Fall

$$(11)\qquad \varphi(\mu) = (1 + x)^{\mu},$$

worin unter $(1 + x)^{\mu}$ der einzige reelle positive Wert dieser Potenz zu verstehen ist.

Trennt man in der allgemeinen Formel (10) den reellen vom imaginären Bestandteil, so erhält man die reellen Werte der Reihen X, Y:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}^{\mu}\cos\mu\omega &= 1 + B_1^{(\mu)} r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2\cos 2\vartheta \\ &\quad + B_3^{(\mu)} r^3\cos 3\vartheta + \cdots, \\ \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}^{\mu}\sin\mu\omega &= B_1^{(\mu)} r\sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2\sin 2\vartheta \\ &\quad + B_3^{(\mu)} r^3\sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

§ 118. Die Binomialreihe an der Grenze der Konvergenz.

1. Wir haben in § 115 gesehen, daß die Binomialreihe einen Konvergenzkreis vom Radius 1 hat. Nach dem Verhalten der Binomialreihe außerhalb dieses Kreises zu fragen, hat keinen Sinn. Wohl aber ist es von Interesse zu untersuchen, ob die Reihe für Punkte des Konvergenzkreises selbst, d. h. für Werte z mit dem absoluten Werte 1, noch konvergent ist. Ist dies der Fall, so kann man die Summe der Reihe für diese Werte nach dem Abelschen Satze (§ 109) ermitteln, indem man in dem Ausdruck für $\varphi(\mu)$, den wir im vorigen Paragraphen gefunden haben, den Grenzwert für $r = 1$ aufsucht.

2. Erster Fall $\mu > 0$.

In diesem Falle konvergiert die Binomialreihe für $r = 1$ und jeden Wert von ϑ unbedingt.

Dies wird erwiesen sein, wenn wir nachweisen können, daß für ein positives μ die Reihe der Binomialkoeffizienten

$$(1)\qquad 1 + B_1^{(\mu)} + B_2^{(\mu)} + B_3^{(\mu)} + \cdots$$

unbedingt konvergiert, denn da $\sin n\vartheta$ und $\cos n\vartheta$ echte Brüche sind, so konvergieren dann auch die beiden Reihen

$$(2)\qquad \begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} \cos\vartheta + B_2^{(\mu)} \cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} \cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)} \sin\vartheta + B_2^{(\mu)} \sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} \sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

Diese Konvergenz wird aber nach § 105, 6. dann erwiesen sein, wenn sich eine Zahl h ermitteln läßt, die größer als 1 ist, für die

$$(3)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} n^h B_n^{(\mu)} = 0$$

wird.

3. Um einen solchen Exponenten zu finden, setzen wir, wenn n und $k < n$ zwei ganze Zahlen sind,

$$\begin{aligned} B_n^{(\mu)} &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\ &= B_k^{(\mu)} \frac{(\mu-k)(\mu-k-1)\cdots(\mu-n+1)}{(k+1)(k+2)\cdots n}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit K den absoluten Wert von $B_k^{(\mu)}$, so ergiebt sich hieraus, wenn $k > \mu$ angenommen wird, der absolute Wert von $B_n^{(\mu)}$:

$$(4)\qquad |B_n^{(\mu)}| = K \frac{k-\mu}{k+1} \frac{k-\mu+1}{k+1} \cdots \frac{n-\mu-1}{n},$$

worin K eine von n unabhängige positive Zahl ist.

Nun ist nach dem binomischen Satz selbst, wenn m größer als 1 ist,

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} \\ &= 1 - \frac{\mu+1}{m} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{m^3} + \cdots \\ &= \left(1-\frac{\mu+1}{m}\right) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{\mu+3}{3m}\right) \\ &\quad + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{1}{m^4}\left(1-\frac{\mu+5}{5m}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

und wenn $m > \mu + 1$, so ist, wenn l eine natürliche Zahl ist:

$$m(l-1) \overline{\gtrless} l-1, \quad ml \overline{\gtrless} m+l-1 > \mu + l,$$

und folglich sind die Differenzen

$$1-\frac{\mu+1}{m}, \quad 1-\frac{\mu+3}{3m}, \quad 1-\frac{\mu+5}{5m}, \cdots$$

alle positiv, also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} > 1 - \frac{\mu+1}{m},$$

wofür wir auch

$$\frac{m-\mu-1}{m} < \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\mu+1}$$

setzen können. Wenden wir dies auf $m = k+1, k+2, \ldots n$ an, so folgt:

$$\frac{k-\mu}{k+1} < \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\mu+1},$$
$$\frac{k-\mu+1}{k+2} < \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\mu+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n-\mu-1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1},$$

und demnach ergibt sich aus (4):

$$(5) \qquad |B_n^{(\mu)}| < K\left(\frac{k+1}{k+2}\,\frac{k+2}{k+3}\cdots\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1}$$
$$< K\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{\mu+1},$$

also, wenn h eine beliebige positive Zahl ist:

$$(6) \qquad |n^h B_n^{(\mu)}| < K(k+1)^{\mu+1}(n+1)^{h-\mu-1},$$

und dies nähert sich mit unendlich wachsendem n der Grenze Null, wenn

$$h < 1 + \mu$$

genommen wird. Da die Annahme $h > 1$ mit dieser Bedingung verträglich ist, so ist hiermit nach (3) die Konvergenz für diesen Fall bewiesen.

Die Formel (5) zeigt, daß

$$(7) \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} B_n^{(\mu)} = 0$$

ist, nicht nur wenn μ positiv ist, sondern auch wenn $\mu + 1$ positiv, also auch wenn μ ein negativer echter Bruch ist. Nur reicht dann das Abnehmen von $B_n^{(\mu)}$ nicht mehr aus, um die unbedingte Konvergenz der Reihe (1) zu verbürgen, da $h < 1 + \mu$ unter 1 bleibt.

4. Das führt uns auf den zweiten Fall $-1 < \mu \overline{\gtrless} 0$.

In diesem Falle konvergiert die Binomialreihe auf dem Konvergenzkreise außer für $z = -1$, aber im allgemeinen nicht mehr unbedingt.

Der Beweis stützt sich auf die allgemeine Formel (§ 53, (7))

$$(8) \qquad B_n^{(\mu+1)} = B_n^{(\mu)} + B_{n-1}^{(\mu)},$$

deren Richtigkeit für beliebige μ sich direkt aus den Ausdrücken für die Binomialkoeffizienten ergibt, nach denen

$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu-n+1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}, \quad B_n^{(\mu+1)} = \frac{\mu+1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}$$

ist. Setzen wir jetzt für ein beliebiges z

$$S_n^{(\mu)} = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} z^n,$$

so folgt durch Multiplikation mit $1 + z$ nach (8):

$$\begin{aligned}(1+z)S_n^{(\mu)} &= 1 + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)}z^n \\ &\quad + \quad z + B_1^{(\mu)}z^2 + \cdots + B_{n-1}^{(\mu)}z^n + B_n^{(\mu)}z^{n+1} \\ &= 1 + B_1^{(\mu+1)}z + B_2^{(\mu+1)}z^2 + \cdots + B_n^{(\mu+1)}z^n + B_n^{(\mu)}z^{n+1} \\ &= S_n^{(\mu+1)} + z^{n+1}B_n^{(\mu)}.\end{aligned}$$

Ist nun der absolute Wert r von z gleich 1, so bleibt z^{n+1} endlich und $B_n^{(\mu)}$ wird nach (7) gleich Null, wenn n ins Unendliche wächst. Da aber $\mu + 1 > 0$ ist, so hat $S_n^{(\mu+1)}$ nach Nr. 2. einen endlichen Grenzwert, und wenn daher $1 + z$ nicht $= 0$ ist, so hat auch $S_n^{(\mu)}$ einen solchen, d. h. die Reihe $\varphi(\mu)$ konvergiert.

Für $z = -1$ kann aber die Reihe in diesem Falle nicht konvergieren, denn für ein reelles echt gebrochenes z ist der Wert von $\varphi(\mu)$ gleich $(1+z)^\mu$, und dies wird unendlich groß, wenn μ negativ ist und $z = -1$ wird. Also kann nach dem Abelschen Satze § 109 für $z = -1$ keine Konvergenz stattfinden. Für $\mu = 1$ und $z = -1$ ergibt aber die Binomialreihe den Ausdruck $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$, also eine zwischen 0 und 1 schwankende Summe.

5. Sehr leicht erledigt sich der dritte Fall $\mu \overline{\gtrless} -1$.

In diesem Falle ist $\mu + 1$ negativ oder Null, folglich $n - \mu - 1$ positiv und größer als n oder mindestens $= n$. Es ist daher

$$\frac{n - \mu - 1}{n} \overline{>} 1,$$

und folglich sind die Binomialkoeffizienten $B_n^{(\mu)}$ größer als 1 und nähern sich nicht der Grenze Null. Es werden also auch die Glieder der Reihe X, Y:

$$B_m^{(\mu)} \cos m\vartheta, \quad B_m^{(\mu)} \sin m\vartheta$$

nicht unendlich klein, und diese Reihen können daher nicht konvergieren. Die einzige Ausnahme, die aber als selbstverständlich kein Interesse bietet, ist die Reihe Y, wenn $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ ist, wo dann $Y = 0$ wird.

6. Um in den Fällen der Konvergenz die Summe zu finden, hat man in § 117. (8), (9) und (10) $r = 1$ zu setzen. Dann wird

$$\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

da $\cos\frac{1}{2}\vartheta$ positiv ist, wenn, wie vorausgesetzt war, ϑ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Es ist ferner

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta}{2(\cos\frac{1}{2}\vartheta)^2} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta$$

und folglich

$$\omega = \tfrac{1}{2}\vartheta,$$

was, wie von ω verlangt war, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Dem-

nach ergibt die Formel § 117, (10) durch Trennung des reellen vom imaginären Bestandteil:

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^\mu \cos\mu\frac{\vartheta}{2} = 1 + B_1^{(\mu)}\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\cos 3\vartheta + \cdots,$$

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^\mu \sin\mu\frac{\vartheta}{2} = \qquad B_1^{(\mu)}\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\sin 3\vartheta + \cdots,$$

und diese Formeln gelten für $\mu > -1$; der Grenzwert $\vartheta = \pm\pi$ ist für ein positives μ auch noch zulässig.

7. Nehmen wir $\mu = \frac{1}{2}$, so ist

$$B_1^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}, \quad B_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{2\cdot 4}, \quad B_3^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}, \cdots,$$

$$B_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n},$$

und folglich ergibt sich für ein echt gebrochenes reelles x:

$$(9) \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots.$$

Ferner findet man für $\mu = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots.$$

Man kann diese Formeln zur Berechnung von Quadratwurzeln benutzen, und diese Berechnung ist besonders einfach, wenn es sich um Quadratwurzeln aus Zahlen handelt, die von der nächsten Quadratzahl wenig verschieden sind. So ist z. B.

$$(10) \qquad \sqrt{99} = \sqrt{100-1} = 10\sqrt{1-0{,}01}.$$

Man setze in der Formel (9) $x = -0{,}01$ und erhält:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x &= 0{,}005 \\ \tfrac{1}{8}x^2 &= 0{,}0000125 \\ -\tfrac{1}{16}x^3 &= 0{,}0000000625 \\ \hline &\ 0{,}0050125625 \end{aligned}$$

$$1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 = 0{,}9949874375$$

$$\sqrt{99} = 9{,}949874375,$$

worin nur die letzte Stelle etwas zu groß ist. Durch Division mit 3 erhält man

$$\sqrt{11} = 3{,}31662479$$

auf neun Stellen genau.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

§ 119. Logarithmische Reihen.

1. Wenn wir in der Binomialreihe

$$(1)\qquad (1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

worin x ein positiver oder negativer echter Bruch ist, $\mu = 0$ setzen, so ergibt sich beiderseits der Wert 1; bilden wir aber daraus zunächst

$$(2)\qquad \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x + \frac{\mu-1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

und lassen jetzt μ in Null übergehen, so geht die rechte Seite in die Reihe über:

$$(3)\qquad \lambda = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

die ebenfalls konvergent ist, wenn x ein echter Bruch ist.

Die Reihe (2) ist aber nach § 116, 4. für ein echt gebrochenes x eine stetige Funktion von μ, und es ist also λ der Grenzwert des Quotienten $((1+x)^\mu - 1) : \mu$ für $\mu = 0$.

Es handelt sich nun also darum, diesen Grenzwert noch anders als durch eine unendliche Reihe zu bestimmen, um die Summe der Reihe (3) zu erhalten.

Ohne weiteres geht dies nicht, weil in dem Bruch $((1+x)^\mu - 1) : \mu$ für $\mu = 0$ Zähler und Nenner verschwinden, und 0/0 keine bestimmte Bedeutung hat. Wir können aber mit Hilfe der Grenzwerte, die wir früher bestimmt haben (§ 106), auch diesen Grenzwert indirekt ermitteln.

Wir setzen

$$(4)\qquad (1+x)^\mu - 1 = \frac{1}{y},$$

und wenn dann μ bis Null abnimmt, so wächst y ins Unendliche. Aus (4) aber folgt:

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{1}{y},$$

und wenn wir beiderseits in einem beliebigen System die Logarithmen nehmen

$$\mu = \frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\log(1+x)}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt aber:

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{y\log\left(1+\frac{1}{y}\right)} = \frac{\log(1+x)}{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}. \tag{6}$$

Nach § 106, 5. ist

$$\lim_{y=\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

(Basis des natürlichen Logarithmensystems), und folglich ist nach (6)

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{\log e}.$$

Diese Formel wird am einfachsten, wenn wir e als Basis des Logarithmensystems nehmen. Diese Logarithmen heißen **natürliche Logarithmen**. Sie werden zum Unterschied von den anderen, z. B. den Briggischen, verschieden bezeichnet, etwa mit $\log\operatorname{nat} x$ oder $\mathrm{l}(x)$. Wir wollen hier das gleichfalls gebräuchliche Zeichen $\ln x$ benutzen. Wenn wir also jetzt das natürliche Logarithmensystem zu Grunde legen, so haben wir

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \ln(1+x).$$

Wir erhalten daher aus (3) die Entwicklung

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots. \tag{7}$$

Eine noch etwas bequemere Formel ergibt sich, wenn wir x in $-x$ verwandeln:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots, \tag{8}$$

und dann (8) von (7) subtrahieren:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots. \tag{9}$$

Setzt man

$$\frac{1+x}{1-x} = y \quad \text{und folglich} \quad x = \frac{y-1}{y+1},$$

so erhält man für jedes positive y ein echt gebrochenes x, und zwar, wenn $y > 1$ ist, ein positives, wenn $y < 1$ ist, ein negatives x, und man kann also aus der Reihe (9) den natürlichen Logarithmus einer jeden positiven Zahl finden.

Für $x = 1/3$ ergibt sich aus (9)

$$(10) \quad \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \cdots,$$

woraus man auf sechs Stellen genau den natürlichen Logarithmus von 2 gleich

$$0{,}693147$$

erhält. Eine große Genauigkeit auf diesem Wege zu erhalten, ist ziemlich mühselig.

2. Die Reihe (7) ist divergent für $x = -1$, denn für diesen Wert wird sie

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Dagegen ergibt sich für $x = +1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

und diese Reihe konvergiert, wenn auch nur bedingt (§ 108, 5.).

Nach dem Satze von der Stetigkeit der Potenzreihe (§ 109) können wir aber die Summe dieser Reihe bestimmen, indem wir in der Summe $\ln(1 + x)$ die Veränderliche $x = 1$ setzen. Wir finden so:

$$(11) \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert aber noch viel langsamer als die Reihe (10), und um damit eine Genauigkeit von mehreren Dezimalen zu erhalten, müßte man eine ungeheure Zahl von Gliedern berücksichtigen.

§ 120. Cyklometrische Reihen.

1. Nehmen wir in der Binomialreihe z rein imaginär, $= ix$, so ergibt sich

$$\varphi(\mu) = 1 + i\mu x - \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} x^2 - i \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

und den Wert dieser Summe erhält man aus § 117 (9), (10), wenn man dort $\vartheta = \pm \frac{1}{2}\pi$ setzt, worin das obere Zeichen bei positivem, das untere bei negativem x steht. Es wird dann, wenn x ein echter Bruch ist, $r = |x|$ und

(1) $$\operatorname{tg} \omega = x,$$

und folglich

$$\varphi(\mu) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^\mu (\cos \mu\omega + i \sin \mu\omega).$$

Trennen wir den reellen von dem imaginären Teil, so folgt:

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)^\mu \cos \mu\omega = 1 - \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^4 - \cdots,$$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)^\mu \sin \mu\omega = \mu x - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^5 - \cdots,$$

und wenn wir die zweite dieser Reihen durch μ dividieren:

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)^\mu \frac{\sin \mu\omega}{\mu} = x - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^5 \cdots.$$

Setzen wir $\mu = 0$, so ergibt die rechte Seite die unendliche Reihe:

(2) $$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots,$$

die für jedes echt gebrochene x konvergiert, und ihren Wert finden wir wie bei der logarithmischen Reihe, wenn wir den Grenzwert der linken Seite für $\mu = 0$ aufsuchen.

Es ist aber nach § 114, 2. $\sin\alpha : \alpha = 1$ für $\alpha = 0$, und wenn wir also $\alpha = \mu\omega$ setzen:

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=0} \frac{\sin \mu\omega}{\mu} = \omega \operatorname*{Lim}_{\mu=0} \frac{\sin \mu\omega}{\mu\omega} = \omega,$$

und $\left(\sqrt{1+x^2}\right)^\mu$ wird $= 1$; also haben wir

(3) $$\omega = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

2. Wenn die Tangente eines Winkel ω irgendwie als positive oder negative Zahl x gegeben ist, so ist dadurch der Winkel selbst nur bis auf ein Vielfaches von π bestimmt. Er wird aber vollständig bestimmt, wenn noch die Beschränkung hinzugefügt wird, daß er zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen soll. Man bezeichnet den Winkel (in Bogenmaß ausgedrückt) unter dieser Voraussetzung als den Bogen, dessen Tangente x ist, mit arcus tangens x (richtiger arcus tangentis x) und schreibt auch abgekürzt

(4) $$\omega = \operatorname{arc\,tg} x,$$

und demnach ergibt die Formel (3):

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Da die Formel (5) aber nur gilt, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt, so liegt der Winkel $\operatorname{arc\,tg} x$ zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ (zwischen -45^0 und $+45^0$).

3. Die Reihe (5) bleibt wieder konvergent, wenn $x = 1$ wird, der $\operatorname{arc\,tg} x$ geht aber dann in den Wert $\frac{1}{4}\pi$ über, und wir erhalten so die Summe der berühmten Leibnitzschen Reihe:

$$(6) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$ [1)]

eine Reihe, die freilich, der langsamen Konvergenz wegen, zur praktischen Berechnung von π nicht geeignet ist.

4. Besser konvergierende Reihen zur Berechnung von π erhält man, wenn man einen Winkel nimmt, der in einem bestimmten Verhältnis zu π steht und dessen Tangente einen gleichfalls bekannten echt gebrochenen Wert hat. Nehmen wir z. B. den Winkel von $\frac{1}{6}\pi = 30^0$ (die Hälfte des Winkels im gleichseitigen Dreieck), so ist dessen Tangente $1/\sqrt{3}$, und die Formel (5) ergibt:

$$(7) \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \cdots.$$

Noch besser konvergierende Entwicklungen werden sich später ergeben.

§ 121. Die Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$.

1. Wenn wir in der Reihe § 119, (9) x durch ix ersetzen, so ergibt sich, von dem Faktor i abgesehen, gerade die Reihe § 120, (5), und es liegt also nahe, auch

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

zu setzen. Diese Gleichung gibt uns zunächst nur eine Definition des Logarithmus einer imaginären Größe; aber vermöge dieser Definition vereinigen sich die beiden Reihen § 119, (9) und § 120, (5) unter ein gemeinschaftliches Gesetz.

2. Nach der Formel (1) bleibt die Grundeigenschaft der Logarithmen bestehen, daß nämlich die Summe zweier Logarithmen gleich dem Logarithmus des Produktes der Summanden ist. Setzen wir nämlich

---

1) Über die Entdeckung dieser Reihensumme durch Leibnitz vergleiche man Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. III, Kapitel 86.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} y,$$
$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta,$$

so ist nach der Additionsformel für die Tangente

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{x+y}{1-xy},$$

folglich

$$\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

oder

$$(2) \qquad \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Hierbei ist aber noch zu bemerken, daß, wenn die Summe $\alpha + \beta$ aus dem Intervall $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ heraustritt, auf der linken Seite noch π hinzuzusetzen oder abzuziehen ist.

Wenden wir aber die Formel (1) auf (2) an, so ergibt sich:

$$\ln \frac{1+ix}{1-ix} + \ln \frac{1+iy}{1-iy} = \ln \frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)},$$

und es ist

$$\frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)} = \frac{(1+ix)(1+iy)}{(1-ix)(1-iy)},$$

also, wie das Gesetz der Logarithmen verlangt:

$$(3) \qquad \ln \frac{1+ix}{1-ix} + \ln \frac{1+iy}{1-iy} = \ln \frac{1+ix}{1-ix} \cdot \frac{1+iy}{1-iy}.$$

4. Dieses Gesetz kann man nun anwenden, um die Reihe für $\operatorname{arc\,tg} x$ in eine Summe von ähnlichen Reihen zu zerlegen, die eine viel höhere Konvergenz haben, und die also zu einer genauen Berechnung von π geeignet sind.

Bestimmt man x und y als echte Brüche so, daß

$$(4) \qquad \frac{x+y}{1-xy} = 1$$

wird, so ist nach (2), da $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y,$$

und aus § 120, (5) folgt:

$$\frac{\pi}{4} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$
$$+ y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots.$$

Um x und y zu bestimmen, leitet man aus (4) ab:

$$(x+1)(y+1) = 2,$$

und wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, so ergibt sich $y = \frac{1}{3}$, also

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{2^7} + \cdots,$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^7} + \cdots,$$

worin die beiden Reihen schon gut konvergieren.

Wenn man zu der Formel (2) noch einen dritten Winkel, $\operatorname{arc\,tg} z$ addiert, und die Formel dann nochmals anwendet, so ergibt sich

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz},$$

und wenn man x, y, z als echte Brüche so bestimmt, daß

$$x + y + z - xyz = 1 - xy - xz - yz$$

wird, so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z$$

in drei unter Umständen noch besser konvergierende Reihen zerlegt. Nimmt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{8}$, $z = \frac{1}{5}$, so wird

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{8} + \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{5}.$$

Nach dieser Formel hat Dahse gerechnet, der die 200 ersten Dezimalstellen der Zahl π ermittelt hat[1]).

§ 122. Trigonometrische Reihen.

1. Wenn wir in den allgemeinen Ausdrücken für X, Y (§ 117 (12)) μ in Null übergehen lassen, so erhalten wir neue Reihenentwicklungen

1) Die Rechnung ist später noch auf 500 Dezimalen fortgesetzt worden. Um von der Genauigkeit, die z. B. schon 100 Stellen geben, eine Vorstellung zu gewinnen, hat H. Schubert in Hamburg ein kühnes Bild ersonnen, das man in dem Aufsatze „Die Quadratur des Zirkels“ in der Sammlung wissenschaftlicher Vorträge“ von Virchow und Holtzendorff, Heft 67, findet.

Die Zeichen e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems und π für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser sind allgemein in Gebrauch gekommen, seit sie Euler in einer in den Schriften der Petersburger Akademie von 1739 erschienen Schrift „Variae observationes circa series infinitas“ angewandt hat. Das Zeichen π findet sich ebenso gebraucht schon 1706 bei William Jones.

Die Zahl π wird die Ludolphische Zahl genannt, nach Ludolph von Ceulen, 1610 als Professor in Leiden gestorben, der diese Zahl auf 35 Dezimalen berechnet hat. In der Peterskirche zu Leiden war 1840 noch eine seitdem nicht wiedergefundene Inschrift, die diese Zahl angab. Berechnungen dieser Zahl gehen aber bis auf Archimedes zurück. Cantor, Bd. II, S. 598 f.

Die Zahl von Dahse findet sich in Crelles Journal, Bd. 27 (1844).

von sehr merkwürdigen Eigenschaften. Wir erhalten zunächst, wenn wir bedenken, daß für $\mu = 0$

$$\frac{B_n^{(\mu)}}{\mu} = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)\cdots(\mu - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

ist:

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \lim_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu \cos \mu\omega - 1}{\mu} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \cdots, \\ \lim_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu \sin \mu\omega}{\mu} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \cdots, \end{aligned}$$

wenn

$$\text{(2)} \qquad \varrho = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}$$

ist.

Nach der Formel

$$\cos\mu\omega = 1 - 2\left(\sin\frac{\mu\omega}{2}\right)^2$$

ist aber

$$\text{(3)} \qquad \frac{\varrho^\mu \cos\mu\omega - 1}{\mu} = \frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} - 2\varrho^\mu \frac{\sin\frac{1}{2}\mu\omega}{\mu} \sin\tfrac{1}{2}\mu\omega,$$

und da nun, wie wir schon oben gesehen haben,

$$\lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega, \qquad \lim_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} = \ln\varrho$$

ist, so verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite von (3), und wir erhalten aus (1)

$$\text{(4)} \quad \begin{aligned} \ln\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4} r^4 \cos 4\vartheta + \cdots, \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4} r^4 \sin 4\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

2. Die interessantesten Resultate ergeben sich hieraus aber, wenn wir zur Grenze der Konvergenz $r = 1$ übergehen. Daß die Reihen auf der rechten Seite von (4) für $r = 1$ noch konvergent sind, folgt aus einem allgemeinen Satz, dessen Beweis wir hier einschalten.

Es seien $c_1, c_2, c_3, \ldots$ positive Zahlen, die den Bedingungen

$$\text{(5)} \qquad c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \cdots, \quad \lim_{n=\infty} c_n = 0$$

genügen, also eine Reihe abnehmender Zahlen, die schließlich unter jede Grenze heruntersinken. Es sei ferner

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

eine Reihe positiver oder negativer Zahlen von der Eigenschaft, daß sich

$$(6) \qquad U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

mit unendlich wachsendem n zwar nicht notwendig einer bestimmten Grenze nähert, aber doch dem absoluten Wert nach unter einer endlichen Grenze g bleibt.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$(7) \qquad S_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n$$

konvergent, d. h. es ist $\operatorname{Lim} S_n = S$ ein bestimmter Wert.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir nach (6):

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1, \\ u_2 &= U_2 - U_1, \\ u_3 &= U_3 - U_2, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n &= U_n - U_{n-1}, \end{aligned}$$

und erhalten daraus:

$$\begin{aligned} S_n &= c_1 U_1 + c_2(U_2 - U_1) + c_3(U_3 - U_2) + \cdots + c_n(U_n - U_{n-1}) \\ &= U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + \cdots + U_{n-1}(c_{n-1} - c_n) + U_n c_n. \end{aligned}$$

Da nun die unendliche Reihe

$$(c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + (c_3 - c_4) + \cdots = c_1$$

aus lauter positiven Gliedern besteht und konvergiert, und da die $U_1, U_2, U_3, \ldots$ alle absolut genommen kleiner als g sind, so ist auch die Reihe

$$U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + U_3(c_3 - c_4) + \cdots$$

konvergent (nach § 107, 6.), und da sich $U_n c_n$ der Grenze Null nähert, so ist auch S_n konvergent.

Setzt man in diesem Satze für die Reihe $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ die Zahlen $+1, -1, +1, -1, \cdots$, so erhält man daraus das Theorem § 108, 3.

3. Um den Satz auf die Reihen (4) anzuwenden, setzen wir

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{4}, \cdots,$$

wodurch die Voraussetzung (5) befriedigt ist, und es ist dann noch zu zeigen, daß die Summen

$$\begin{aligned} U_n &= \cos\vartheta - \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta - \cdots \pm \cos n\vartheta, \\ V_n &= \sin\vartheta - \sin 2\vartheta + \sin 3\vartheta - \cdots \pm \sin n\vartheta \end{aligned}$$

unter einer endlichen Grenze bleiben. Dies ergibt sich leicht aus den trigonometrischen Formeln:

$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos n\vartheta = \cos(n-\tfrac{1}{2})\vartheta + \cos(n+\tfrac{1}{2})\vartheta,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\sin n\vartheta = \sin(n-\tfrac{1}{2})\vartheta + \sin(n+\tfrac{1}{2})\vartheta.$$

Wendet man diese Formeln auf die einzelnen Glieder der Summen an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2U_n\cos\frac{1}{2}\vartheta &= \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta + \cos\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\cos\frac{3}{2}\vartheta + \cos\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots \\ &\qquad \pm\left(\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta + \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta\right), \\ &= \cos\frac{1}{2}\vartheta \pm \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2V_n\cos\frac{1}{2}\vartheta &= \left(\sin\frac{1}{2}\vartheta + \sin\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\sin\frac{3}{2}\vartheta + \sin\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots \\ &\qquad \pm\left(\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta + \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta\right), \\ &= \sin\frac{1}{2}\vartheta \pm \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta. \end{aligned}$$

Wir müssen nur den Fall ausnehmen, daß $\cos\frac{1}{2}\vartheta = 0$, also $\vartheta = \pm\pi$ ist. Abgesehen von diesem Fall zeigen aber die vorstehenden Formeln, da $\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta$ und $\cos(n+\frac{1}{2})\vartheta$ zwar bei wachsendem n unaufhörlich schwanken, aber doch immer positive oder negative echte Brüche bleiben, daß U_n und V_n niemals über bestimmte Grenzen hinausgehen.

In dem ausgeschlossenen Fall $\vartheta = \pm\pi$ werden alle Glieder der Reihe U_n gleich -1, und U_n wird also negativ unendlich. Die Glieder von V_n aber werden alle gleich Null und folglich V_n selbst ebenfalls.

4. Nachdem also die Konvergenz festgestellt ist, können wir nach § 109 den Wert der Summe (4) für $r = 1$ ermitteln, wenn wir auf der linken Seite r in 1 übergehen lassen. Dadurch wird

$$\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}.$$

In diesen Formeln ist $-\pi < \vartheta < \pi$ und folglich $\cos\frac{\vartheta}{2}$ positiv, $\frac{1}{2}\vartheta$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen.

Damit erhalten wir also aus (4) die Entwicklungen

$$\begin{aligned} &\log\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) = \cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\cos 4\vartheta + \cdots, \\ (8)\quad &\frac{\vartheta}{2} = \sin\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\sin 4\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

Was den ausgeschlossenen Fall $\vartheta = \pi$ betrifft, so hört in der ersten dieser Reihen die Konvergenz auf, und ebenso wird die linke

Seite unendlich. In der zweiten Formel bleibt die Konvergenz zwar bestehen; der Wert der Summe ist aber nicht gleich $\frac{1}{2}\pi$, sondern Null.

5. Setzen wir in der zweiten Formel (8) $\vartheta = x$ und $\vartheta = \pi - x$, so erhalten wir zwei Formeln:

$$
(9) \quad \begin{aligned}
\frac{1}{2}x &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \\
\frac{\pi - x}{2} &= \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots,
\end{aligned}
$$

von denen die erste in dem Intervall

$$
(10) \qquad -\pi < x < +\pi,
$$

die zweite in dem Intervall

$$
0 < x < 2\pi
$$

gültig ist. Die beiden Formeln haben also einen gemeinsamen Gültigkeitsbereich:

$$
(11) \qquad 0 < x < \pi.
$$

Wenn wir sie addieren, so folgt für dieses Intervall

$$
(12) \qquad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots,
$$

und es zeigt sich hier das merkwürdige Resultat, daß die konvergente Reihe der rechten Seite, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, eine von x unabhängige Summe hat.

6. Von dem Verhalten dieser Reihen kann man sich eine geometrische Anschauung bilden.

Wir wollen setzen:

$$
(13) \quad \begin{aligned}
f(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \\
\varphi(x) &= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots,
\end{aligned}
$$

und da die Reihen auf der rechten Seite dieser Formeln nicht bloß in den Intervallen (10) und (11), sondern für alle x konvergieren, so sind durch (13) zwei Funktionen von x definiert, deren Werte in dem Intervall (11) durch die Formeln (9) und (12) bestimmt sind.

Nun ist aber für jedes ganzzahlige n

$$
\sin(-nx) = -\sin nx, \quad \sin n(x + 2\pi) = \sin nx,
$$

und folglich genügen die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= -f(x), \qquad \varphi(-x) = -\varphi(x), \\
f(x + 2\pi) &= f(x), \qquad \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x).
\end{aligned}
$$

Außerdem ist

$$
f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0
$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi.$$

Hierdurch sind aber die Werte von $f(x)$, $\varphi(x)$ für alle Werte von x bestimmt.

Trägt man den Wert von x als Abscisse auf und

$$y = f(x) \text{ oder } y = \varphi(x)$$

als die zugehörige Ordinate, so erhält man wie in § 92 eine graphische Darstellung dieser Funktionen, die in Fig. 24 für $f(x)$ und in Fig. 25 für $\varphi(x)$ gegeben ist.

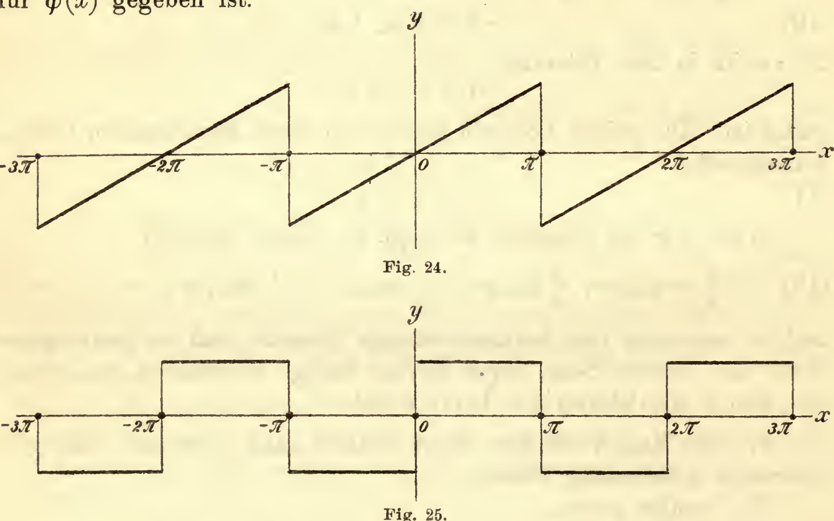


Fig. 24.

Fig. 25.

Man sieht, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ unstetige Funktionen sind, obwohl die Glieder der Reihen, durch die sie definiert sind, stetige Funktionen sind.

Um sich eine Vorstellung von dem Zustandekommen solcher Unstetigkeiten zu bilden, ist es gut, durch hinlänglich genaue Rechnung und Konstruktion in nicht zu kleinem Maßstabe etwa die durch die Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x, \cdots$$

dargestellten Kurven aufzuzeichnen. Alle diese Kurven gehen durch die Punkte $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$; jede folgende steigt in diesen Stellen steiler auf als die vorhergehende, und sie nähern sich sehr merklich unter wellenförmigen Schwankungen der in Fig. 25 dargestellten Gestalt an.

Diese Reihen sind spezielle Fälle der unter dem Namen Fouriersche Reihen bekannten Entwicklungen, die in der mathematischen Physik häufige Verwendung finden.

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Produkte.

---

§ 123. Konvergenz eines unendlichen Produktes.

1. Außer durch unendliche Reihen kann man manche Funktionen, besonders die trigonometrischen, auch durch unendliche Produkte darstellen. Nimmt man den Logarithmus eines solchen Produktes, so erhält man eine unendliche Reihe, deren Glieder die Logarithmen der Faktoren sind. Es ist aber vorzuziehen, die Produkte selbst und nicht erst die unendlichen Reihen der Logarithmen zu betrachten. Wir schicken einen Hilfssatz voraus:

2. Hilfssatz. Wenn $q_1, q_2, q_3, \cdots q_n$ eine Reihe von positiven echten Brüchen ist, und

$$Q_n = (1 - q_1)(1 - q_2) \cdots (1 - q_n)$$

gesetzt wird, so ist

$$(1) \qquad 1 > Q_n > 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n).$$

Daß $Q_n < 1$ ist, ersieht man unmittelbar daraus, daß alle Faktoren $1 - q_1,\ 1 - q_2, \cdots$ positive echte Brüche sind. Für $n = 2$ ist

$$Q_2 = 1 - (q_1 + q_2) + q_1 q_2,$$

und dies ist offenbar größer als $1 - q_1 - q_2$. Die Ungleichung (1) ist also für $n = 2$ richtig. Wir nehmen sie daher für irgend ein n als erwiesen an, und bilden

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) > 1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{n+1}) \\ + q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \cdots + q_n q_{n+1},$$

also, da $q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \cdots + q_n q_{n+1}$ positiv ist,

$$Q_{n+1} > 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{n+1}),$$

wodurch (1) allgemein bewiesen ist.

3. Bilden die positiven echten Brüche $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ eine unendliche Reihe, die eine konvergente Summe hat, so hat

$$(2) \qquad q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n$$

für unendlich wachsende n einen bestimmten Grenzwert g, und Q_n ist, wie groß n sein mag, größer als $1 - g$. Andererseits werden die Q_n mit wachsendem n immer abnehmen, da $1 - q_{n+1}$ ein echter Bruch ist und folglich

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) < Q_n.$$

Es haben also die Q_n eine bestimmte untere Grenze Q, und es ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} Q_n = Q.$$

Man nennt in diesem Falle Q ein konvergentes unendliches Produkt und setzt auch, ähnlich wie bei den unendlichen Reihen:

$$(3) \qquad Q = (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3) \cdots.$$

4. Die Konvergenz der Reihe (2) setzt voraus, daß die Größen q_n mit unendlich wachsendem n gegen Null konvergieren. Die Konvergenz des Produktes (3) wird aber nicht beeinträchtigt, wenn von den q eine endliche Anzahl größer als 1 oder selbst negativ sind. Denn wenn in dem Produkt (3) eine endliche Anzahl von Faktoren irgendwie abgeändert werden, so bleibt für die übrigen noch immer ein endlicher Grenzwert.

5. Für die Konvergenz des Produktes Q erhält man dasselbe allgemeine Kennzeichen, wie in § 107, 3.:

Bezeichnet man mit $R_{n,m}$ das Produkt

$$R_{n,m} = (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2}) \cdots (1 - q_{n+m}),$$

so ist Q konvergent, wenn $R_{n,m}$ der Einheit beliebig nahe kommt, sobald n und $n + m$ beide größer als eine hinlänglich große Zahl N sind.

§ 124. Darstellung des Sinus durch ein unendliches Produkt.

1. Wenn wir in der Moivreschen Formel

$$\cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n$$

für irgend ein positives ganzzahliges n den binomischen Lehrsatz anwenden, so ergibt sich

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos y^n + i B_1^{(n)} \cos y^{n-1} \sin y - B_2^{(n)} \cos y^{n-2} \sin y^2$$
$$- i B_3^{(n)} \cos y^{n-3} \sin y^3 + \cdots$$

und daraus:

$$(1)\quad \begin{aligned} \cos ny &= \cos y^n - B_2^{(n)} \cos y^{n-2} \sin y^2 + B_4^{(n)} \cos y^{n-4} \sin y^4 - \cdots \\ \frac{\sin ny}{\sin y} &= B_1^{(n)} \cos y^{n-1} - B_3^{(n)} \cos y^{n-3} \sin y^2 + B_5^{(n)} \cos y^{n-5} \sin y^5 - \cdots. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$z = \sin^2 y, \quad 1 - z = \cos^2 y$$

und nehmen jetzt $n = 2m + 1$ als ungerade Zahl an, so sind $\cos y^{n-1}$, $\cos y^{n-3}$, $\cos y^{n-5}$, ... ganze Funktionen von z von den Graden $m, m-1, m-2, \cdots$, und die zweite Formel (1) ergibt

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = F(z),$$

worin $F(z)$ eine ganze Funktion von z vom Grade m bedeutet.

Wenn wir die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_m$ von $F(z)$ kennen, so können wir nach § 61, 5. setzen:

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = a_0 (z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_m - z),$$

worin a_0 von z unabhängig ist. Um a_0 zu bestimmen, setzen wir $y = 0$. Dann wird $z = 0$ und (nach (1)) $\sin ny : \sin y = n$, folglich

$$a_0 z_1 z_2 \cdots z_m = n,$$

und wir erhalten:

$$(2)\qquad \sin ny = n \sin y \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right).$$

Nun verschwindet aber $\sin ny$ außer für $y = 0$ immer, wenn ny ein Vielfaches von π ist; folglich sind die Wurzeln von $F(z)$ alle in der Form enthalten

$$(3)\qquad z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2,$$

wenn h eine ganze Zahl ist; $h = 0$ führt aber nicht zu einer Wurzel von $F(z)$, weil $F(0) = n$ ist; außerdem ist

$$z_h = z_{-h}, \quad z_h = z_{n-h}, \quad z_h = z_{n+h},$$

und wir erhalten also alle voneinander verschiedenen Werte von z_h, wenn wir in (3) $h = 1, 2, 3, \cdots m$ setzen.

2. Setzen wir $ny = x$, so ergibt sich aus (2)

$$(4)\qquad \sin x = n \sin \frac{x}{n} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right),$$

worin

$$z = \left(\sin \frac{x}{n}\right)^2, \quad z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2$$

zu setzen ist.

Halten wir nun x fest und lassen n ins Unendliche wachsen, so ist nach § 114, 2.

$$\operatorname{Lim} n \sin \frac{x}{n} = x, \quad \operatorname{Lim} \frac{z}{z_h} = \frac{x^2}{h^2 \pi^2}.$$

Die Anzahl der Faktoren von (4) wächst alsdann auch ins Unendliche, und es ergibt sich aus (4):

$$(5) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots.$$

Es ist also $\sin x$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt, von dem überdies feststeht, daß es konvergiert. Denn setzen wir

$$Q = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots,$$

also in § 123, (3):

$$q_h = \frac{x^2}{\pi^2 h^2},$$

so ist

$$\Sigma q_h = \frac{x^2}{\pi^2} \sum^h \frac{1}{h^2},$$

und die Reihe $\sum^h \frac{1}{h^2}$ ist nach § 105, 6. konvergent.

3. Die Richtigkeit der Formel (5) ist aber hiermit noch nicht vollständig bewiesen. Denn in den späteren Faktoren des Produktes (4) wird h in $\sin \frac{h\pi}{n}$ gleichzeitig mit n unendlich groß, und da ist es also nicht ohne weiteres erlaubt, den Sinus durch den Bogen zu ersetzen. Um den Beweis zu vervollständigen, setzen wir

$$Q(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$Q_k(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$R_k(x) = \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

und wegen der Konvergenz von $Q(x)$ kommt $R_k(x)$ der Einheit beliebig nahe, wenn k und m hinlänglich groß sind.

Es sei nun

$$Q'_k(x) = n \sin \frac{x}{n}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

$$R'_k(x) = \left(1 - \frac{z}{z_{k+1}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{k+2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{z_m}\right),$$

und wenn wir also k festhalten und n ins Unendliche wachsen lassen, so ist

$$\lim_{n=\infty} Q_k' = Q_k.$$

4. Nach § 114, 1. ist aber

$$\sin\alpha < \alpha,$$

und man kann leicht zeigen, daß, wenn α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt,

$$\sin\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha$$

ist. Denn nach § 114, (9) ist

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) + \frac{\alpha^4}{5!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{\alpha^6}{7!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8\cdot 9}\right) + \cdots,$$

und wenn nun $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ ist, so sind die Klammerausdrücke

$$1 - \frac{\alpha^2}{6} > 1 - \frac{\pi^2}{24} > \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{6\cdot 7} > 0, \quad 1 - \frac{\alpha^2}{8\cdot 9} > 0, \cdots$$

und folglich $\sin\alpha > \frac{1}{2}\alpha$. Demnach ist, wenn $h < \frac{1}{2}n$ ist,

$$\sin\frac{x}{n} < \frac{x}{n}, \quad \sin\frac{h\pi}{n} > \frac{h\pi}{2n},$$

und folglich

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\sin\frac{h\pi}{n}} < \frac{2x}{h\pi},$$

folglich

$$1 - \frac{z}{z_h} > 1 - \frac{4x^2}{h^2\pi^2}.$$

Es ist also

$$R_k'(x) > \left(1 - \frac{4x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

also

$$1 > R_k'(x) > R_k(2x).$$

Folglich kommt $R_k'(x)$ der Einheit beliebig nahe, wenn k und n groß genug angenommen werden, und aus der genauen Formel

$$\frac{\sin x}{x} = Q_k'(x)\, R_k'(x)$$

folgt, daß $Q_k(x)$ dem Werte von $\sin x : x$ beliebig nahe gebracht werden kann, wenn n groß genug ist. $Q_k(x)$ kommt aber auch dem Werte $Q(x)$ beliebig nahe, und daraus folgt

$$\frac{\sin x}{x} = Q(x),$$

wodurch die Formel (5) bewiesen ist.

5. Wenn man in (5) $x = \frac{1}{2}\pi$, also $\sin x = 1$ setzt, so erhält man eine Darstellung von π durch ein unendliches Produkt von Zahlen. Es ergibt sich zunächst:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\cdots.$$

Es kommen also in dem Produkt lauter Faktoren von der Form

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

vor, und wenn man also mit dem reziproken Wert dieses Produktes multipliziert, so folgt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1};$$

man kann dies auch so darstellen

$$(6) \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots (2n-1)^2} \frac{1}{2n+1}$$

oder auch, da $2n : 2n+1$ den Grenzwert 1 hat,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots (2n-1)^2} 2n.$$

Dieser Ausdruck ist bekannt unter dem Namen der Wallisschen Zahl[1]).

Dividiert man durch $\frac{1}{2}\pi$ und zieht die Wurzel, so folgt aus (6), da man $\frac{1}{2}(2n+1)$ für ein unendliches n durch n ersetzen kann:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 1,$$

oder auch, indem man den Bruch mit

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \cdot n!$$

erweitert:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1.$$

§ 125. Unendliches Produkt für den Kosinus.

1. Durch die Formel (5) ist der $\sin x$ zunächst nicht in lineare sondern in quadratische Faktoren zerlegt, man kann aber diese quadratischen Faktoren nach der Formel $1 - \alpha^2 = (1-\alpha)(1+\alpha)$ augenblicklich in lineare Faktoren zerlegen, und dann ist $\sin x$ in der Weise einer ganzen rationalen Funktion in lineare Faktoren zerlegt,

1) John Wallis 1616—1703. Zuerst Theologe, dann Professor der Mathematik in Oxford.

aus denen die „Wurzeln“, d. h. die Werte von x, für die $\sin x$ verschwindet, sofort zu ersehen sind; der Unterschied ist nur der, daß die Anzahl der Faktoren unendlich ist.

Es stellt sich so $\sin x$ als der Grenzwert des Produktes

$$(1)\quad \begin{aligned} &x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\times\\ &\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\end{aligned}$$

für ein unendlich wachsendes n dar.

2. Man kann hieraus eine ähnliche Darstellung für den $\cos x$ ableiten, wenn man Gebrauch macht von der Formel

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Ersetzt man in dem Produkt (1) x durch $\frac{1}{2}\pi - x$, so ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}+\frac{x}{n\pi}\right)\times\\ &\qquad\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}-\frac{x}{n\pi}\right),\end{aligned}$$

oder

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\times\\ &\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)\times\\ &\qquad\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).\end{aligned}$$

Der Faktor

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

hat aber nach § 124, 5. den Grenzwert 1, während wir die übrigen Faktoren von (2) in der Weise zusammenfassen können:

$$\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Lassen wir hierin n ins Unendliche wachsen, so nähert sich der letzte Faktor $1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}$ der Grenze 1, und wir erhalten das unendliche Produkt für den Kosinus:

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

aus dem man wieder unmittelbar die Wurzeln von $\cos x$, nämlich $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ ersieht.

Man hätte dieses Produkt auch auf demselben Wege wie das Produkt für $\sin x$ direkt erhalten können.

§ 126. Die Bernoullischen Zahlen.

1. Wenn wir die beiden Darstellungen für $\sin x$ durch eine unendliche Reihe und durch ein unendliches Produkt miteinander vergleichen, und die Analogie zwischen den ganzen rationalen Funktionen und der Funktion $\sin x$ noch bis zur Berechnung der Potenzsummen verfolgen, so ergeben sich sehr bemerkenswerte Resultate.

Wenn wir das Produkt

$$Q_n = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ausmultiplizieren, so ergibt sich

$$Q_n = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}, \tag{1}$$

worin

$$-a_1, \; +a_2, \; -a_3, \; +a_4, \; \cdots (-1)^n a_n$$

die symmetrischen Grundfunktionen der n Wurzeln

$$\frac{1}{\pi^2}, \; \frac{1}{4\pi^2}, \; \frac{1}{9\pi^2}, \; \cdots \; \frac{1}{n^2\pi^2}, \tag{2}$$

d. h. die Summe, die Summe der Produkte von je zweien, je dreien etc. sind.

Setzen wir aber

$$S_h^{(n)} = \frac{1}{1^{2h}} + \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} + \cdots + \frac{1}{n^{2h}},$$

so sind

$$s_1 = \frac{1}{\pi^2} S_1^{(n)}, \quad s_2 = \frac{1}{\pi^4} S_2^{(n)}, \; \cdots \; s_n = \frac{1}{\pi^{2n}} S_n^n$$

die Potenzsummen der Größen (2), und es bestehen nach § 65, (6) die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} & S_1^{(n)} + \pi^2 a_1 = 0, \\ & S_2^{(n)} + \pi^2 a_1 S_1^{(n)} + 2\pi^4 a_2 = 0, \\ & S_3^{(n)} + \pi^2 a_1 S_2^{(n)} + \pi^4 a_2 S_1^{(n)} + 3\pi^6 a_4 = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

2. Lassen wir nun n ins Unendliche wachsen, so geht Q_n in $\sin x : x$ über, wofür wir nach § 114, (9) die Reihenentwicklung haben:

$$Q = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots,$$

und es ist also

$$(4) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Lim} a_1 &= -\frac{1}{3!}, \\ \operatorname{Lim} a_2 &= \frac{1}{5!}, \\ \operatorname{Lim} a_3 &= -\frac{1}{7!}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Andererseits gehen die $S_h^{(n)}$ in die unendlichen Reihen

$$(5) \qquad \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots, \\ S_2 &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots, \\ S_3 &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

über, die, wie wir im § 104, 3. gesehen haben, alle konvergieren und bestimmte numerische Werte haben. Diese können wir nun bestimmen, wenn wir in (3) gleichfalls n ins Unendliche wachsen lassen. Es ergibt sich nach (4), (5):

$$(6) \qquad \begin{aligned} & S_1 - \frac{\pi^2}{3!} = 0, \\ & S_2 - \frac{\pi^2 S_1}{3!} + \frac{2\pi^4}{5!} = 0, \\ & S_3 - \frac{\pi^2 S_2}{3!} + \frac{\pi^4 S_1}{5!} - \frac{3\pi^6}{7!} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wodurch man die Summen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine nach der andern berechnen kann. Man erhält z. B.

$$(7) \qquad \begin{aligned} S_1 &= \frac{\pi^2}{6}, \\ S_2 &= \frac{\pi^4}{90}, \\ S_3 &= \frac{16\pi^6}{3 \cdot 7!} = \frac{\pi^6}{945}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Man definiert nun ein Zahlensystem B_n unter dem Namen der Bernoullischen Zahlen durch die Formel

$$(8) \qquad B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} S_n,$$

und man erhält für die ersten Fälle

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}.$$

Die Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sind, wie man sieht, rationale Zahlen, sie nehmen anfangs mit wachsendem Index ab, wachsen aber später sehr rasch ins Ungeheuere. Eine Tafel dieser Zahlen bis B_{62} ist von Adams berechnet (Crelles Journal Bd. 85). Beispielsweise führen wir die sieben ersten dieser Zahlen an:

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{5}{66}, \quad \frac{691}{2730}, \quad \frac{7}{6}.$$

B_{62} hat den Nenner 30 und einen Zähler, der mit 110 Stellen geschrieben wird[1]).

3. Wir haben schon früher gesehen, daß die Zahl $n!$ mit unendlich wachsendem n stärker anwächst als die n^{te} Potenz irgend einer noch so großen Zahl (§ 48, 2.). Die Wallissche Zahl bietet ein Hilfsmittel, die Art dieses Anwachsens noch näher zu bestimmen[2]).

Wir gehen von der Formel aus:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1.$$

Setzen wir

$$\varphi(n) = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\, n^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}, \tag{9}$$

so wird

$$\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}},$$

und folglich ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 1. \tag{10}$$

Auf der andern Seite ist

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!}\, \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

---

1) Archimedes will die Sandkörner zählen, die in einer Kugel vom Radius des Weltalls Platz haben. Nehmen wir statt Sandkörner Körperchen, etwa wie nach neueren Ansichten die Elektronen, deren 10^{31} in einem Kubikmillimeter Platz haben, und für das Weltall eine Kugel vom Radius einer Siriusweite, 10^{15} Kilometer, so erhalten wir für die Anzahl dieser Körperchen erst eine Zahl mit 95 Stellen. Wir müßten also diese Zahl noch mit hundert Billionen multiplizieren, um eine Zahl von der Größenordnung der 62. Bernoullischen Zahl zu erhalten.

2) Die elementare Ableitung dieses Grenzwertes rührt von J. A. Serret her.

Nimmt man hiervon den natürlichen Logarithmus, so folgt

$$\ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Nun ist nach § 119, (7)

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots$$

und folglich

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} - \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{12n^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4} - \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} - \frac{2}{4\cdot 6}\frac{1}{n^3} + \frac{3}{5\cdot 8}\frac{1}{n^4} - \frac{4}{6\cdot 10}\frac{1}{n^5} + \cdots.$$

Die Glieder dieser Reihe

$$\frac{1}{3\cdot 4}\frac{1}{n^2},\quad \frac{2}{4\cdot 6}\frac{1}{n^3},\quad \frac{3}{5\cdot 8}\frac{1}{n^4},\quad \frac{4}{6\cdot 10}\frac{1}{n^5},\ \cdots,$$

die nach dem allgemeinen Gesetze

$$\frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)}\frac{1}{n^\nu} \quad (\nu = 2, 3, 4, \cdots)$$

gebildet sind und abwechselnde Zeichen haben, nehmen mit wachsendem ν ab; denn es ist

$$\frac{\nu - 1}{\nu(\nu+1)} - \frac{\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{\nu - 2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \geqq 0$$

und es sind daher die Differenzen

$$\left(\frac{1}{12}\frac{1}{n^2} - \frac{2}{4\cdot 6}\frac{1}{n^3}\right),\quad \left(\frac{3}{5\cdot 6}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{6\cdot 16}\frac{1}{n^3}\right),\ \cdots$$

und die Differenzen

$$\left(\frac{2}{4\cdot 6}\frac{1}{n^3} - \frac{3}{5\cdot 8}\frac{1}{n^4}\right),\quad \left(\frac{4}{6\cdot 10}\frac{1}{n^5} - \frac{5}{7\cdot 12}\frac{1}{n^6}\right),\ \cdots$$

alle positiv. Es entsteht also $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ aus 1 durch Hinzufügung, aus $1 + \frac{1}{12n^2}$ durch Abziehen positiver Zahlen und es ist also

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n^2}$$

und folglich

$$1 < \ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < 1 + \frac{1}{12n^2}.$$

Ersetzt man n durch $n+1,\ n+2,\ \cdots\ 2n-1$, so folgt:

$$1 < \ln \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} < 1 + \frac{1}{12(n+1)^2} < 1 + \frac{1}{12n^2},$$

$$1 < \ln \frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)} < 1 + \frac{1}{12(n+2)^2} < 1 + \frac{1}{12n^2},$$

. . . .

$$1 < \ln \frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)} < 1 + \frac{1}{12(2n-1)^2} < 1 + \frac{1}{12n^2},$$

und wenn man diese Ungleichungen addiert:

$$n < \ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < n + \frac{1}{12n},$$

und daraus, wenn man zum Numerus übergeht:

$$1 < e^{-n} \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{1}{12n}}$$

und folglich

$$\text{(11)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^{-n} \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{e^n \varphi(2n)}{\varphi(n)} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^n \varphi(n) \frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)^2} = 1,$$

und folglich nach (10)

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^n \varphi(n) = 1$$

oder

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Demnach wird für große Werte von n näherungsweise gesetzt werden dürfen:

$$\text{(12)} \qquad n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, e^{-n+(n+\frac{1}{2})\log n}.$$

4. Die Summe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots$$

nähert sich mit unendlich wachsendem Wert von n der Grenze 1, und folglich erhält man aus (8) und (12) für große Werte von n den genäherten Wert der Bernoullischen Zahl B_n:

$$B_n = 4 e^{-2n} n^{2n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}-2n}.$$

Nehmen wir in einer siebenstelligen Tafel die Briggischen Logarithmen, so ergibt sich näherungsweise

$$\log B_n = 2\log 2 + \tfrac{1}{2}\log\pi + 2n(\log n - \log e - \log\pi) + \tfrac{1}{2}\log n,$$

und wenn man $n = 62$ setzt,

$$\log B_{62} = 108{,}50429.$$

Es wird also, in Übereinstimmung mit der Adams'schen Tafel B_{62} eine 109-stellige Zahl, und die drei ersten Ziffern ergeben sich richtig $= 319$.

Sechsundzwanzigster Abschnitt.

Transcendenz von e und π.

§ 127. Die Derivierten einer ganzen Funktion.

1. Man unterscheidet in der Arithmetik algebraische und transcendente Zahlen. Eine Zahl ω heißt algebraisch, wenn sie die Wurzel einer Gleichung

$$(1) \qquad C_0 + C_1\omega + C_2\omega^2 + \cdots + C_n\omega^n = 0$$

ist, deren Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots C_n$ rationale Zahlen sind. Man kann darin immer C_0 und C_n von Null verschieden annehmen und kann überdies $C_0, C_1, \ldots C_n$ als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen. Denn haben diese Zahlen Nenner, so kann man mit dem Hauptnenner multiplizieren, und haben sie einen gemeinsamen Faktor, so kann man die ganze Gleichung durch diesen dividieren.

Eine Zahl, die keiner solchen Gleichung genügt, heißt transcendent.

2. Jede Zahl kann als das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden.

Wenn nun die eine dieser Strecken aus der andern durch geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so ist diese Zahl gewiß algebraisch, und zwar noch von besonderer Natur; denn sie muß durch eine Kette quadratischer Gleichungen bestimmt sein, weil alle Durchschnitte von Kreisen untereinander oder von Kreisen und geraden Linien durch quadratische Gleichungen darstellbar sind und weil jede Zahl, die durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmt ist, die Wurzel einer Gleichung (1) ist (§ 98).

Wir werden in der Folge beweisen, daß die Zahlen e und π zu den transcendenten gehören, und damit ist dann auch das alte berühmte Problem der Quadratur des Kreises erledigt, indem gezeigt ist, daß die Seite eines mit dem Kreise inhaltsgleichen Quadrates in

keiner Weise durch geometrische Konstruktion aus dem Durchmesser des Kreises abgeleitet werden kann[1]).

3. Es sei $f(x)$ eine beliebige ganze Funktion m^{ten} Grades von x, deren Koeffizienten $c_m, c_{m-1}, \ldots c_1, c_0$ zunächst noch ganz unbestimmt gelassen werden:

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0. \tag{2}$$

Wenn wir an Stelle der Veränderlichen x ein Binom $x + h$ setzen, so können wir auf jede Potenz dieses Binoms den binomischen Satz anwenden, und wir können dann die Funktion $f(x+h)$ auch nach Potenzen von h ordnen. Die Koeffizienten dieser Potenzen sind ganze Funktionen von x. Wir haben:

$$(3)\quad \begin{array}{l|l}
c_0 & 1 = 1, \\
c_1 & x + h = x + h, \\
c_2 & (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{m-1} & (x+h)^{m-1} = x^{m-1} + (m-1)hx^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}h^2 x^{m-3} + \cdots + h^{m-1}, \\
c_m & (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m\cdot \overline{m-1}}{1\cdot 2}h^2 x^{m-2} + \cdots + h^m,
\end{array}$$

und wenn wir diese Ausdrücke mit den beigesetzten Koeffizienten multiplizieren und addieren, so folgt:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x), \tag{4}$$

worin

$$(5)\quad \begin{aligned}
f(x) &= c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \cdots + c_0, \\
f'(x) &= mc_m x^{m-1} + (m-1)c_{m-1}x^{m-2} + (m-2)c_{m-2}x^{m-3} + \cdots + c_1, \\
f''(x) &= m(m-1)c_m x^{m-2} + (m-1)(m-2)c_{m-1}x^{m-3} + \cdots + 2\cdot 1 c_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots 1\cdot c_m.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $f', f'', f''', \ldots$ die von den Graden $m-1$, $m-2$, $m-3, \ldots$ sind, heißen die erste, zweite, dritte u. s. f. Derivierte der Funktion $f(x)$ und die Formel (3) ist ein spezieller Fall des Taylorschen Lehrsatzes[2]).

---

1) Der Beweis für die Transcendenz von e ist von Hermite 1873 gefunden, für die Transcendenz von π durch Lindemann 1882.

2) Brook Taylor, 1685—1731. Gab 1715 das Werk „Methodus incrementorum" heraus. Darin ist zuert die Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen gezeigt, von der die oben angegebene Formel der auf ganze Funktionen bezügliche Spezialfall ist.

4. Wir bezeichnen die Derivierten auch bisweilen durch den Buchstaben D mit einem Index, also

$$(6) \qquad D_1 f(x) = f'(x), \quad D_2 f(x) = f''(x), \cdots D_\nu f(x) = f^{(\nu)}(x).$$

Die Formeln (4) oder auch die Entstehungsweise der Derivierten zeigen sofort die Richtigkeit der Formeln

$$D_\nu A f(x) = A D_\nu f(x), \quad D_\nu (f(x) + A) = D_\nu f(x),$$

wenn A eine Konstante ist,

$$D_\nu (f(x) + \varphi(x)) = D_\nu f(x) + D_\nu \varphi(x),$$

wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei ganze Funktionen sind, oder allgemeiner, wenn $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ ganze Funktionen, $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ Konstanten sind:

$$(7) \qquad D_\nu (A + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \cdots) = A_1 D_\nu f_1(x) + A_2 D_\nu f_2(x) + A_3 D_\nu f_3(x) + \cdots.$$

5. Setzt man in (5) die Koeffizienten c mit Ausnahme von c_m gleich Null, so ergeben sich die Derivierten der Potenz x^m:

$$D_1 x^m = m x^{m-1}, \quad D_2 x^m = m(m-1) x^{m-2},$$
$$D_3 x^m = m(m-1)(m-2) x^{m-3} \cdots,$$

was wir auch allgemein so ausdrücken können:

$$D_\nu x^m = m(m-1) \cdots (m - \nu + 1) x^{m-\nu}.$$

Diese Formel gilt natürlich nur, so lange ν nicht größer als m ist. Ist ν kleiner als m, so können wir dafür setzen:

$$D_\nu x^m = \frac{m!}{(m-\nu)!} x^{m-\nu}.$$

Dagegen erhalten wir für $\nu = m$

$$D_m x^m = m!$$

und wenn ν größer als m ist:

$$D_\nu x^m = 0.$$

§ 128. Eigenschaften der Exponentialfunktion.

1. Wir haben in § 113 gesehen, das die Potenz e^x für jedes reelle oder komplexe x durch die Summe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

ausgedrückt werden kann.

Wenn wir unter ν irgend eine positive ganze Zahl verstehen und diese Formel mit $\nu!$ multiplizieren, so ergibt sich

$$(1)\qquad \nu! e^x = \nu! + \frac{\nu!}{1!}x + \frac{\nu!}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu-1)!}x^{\nu-1} + U_\nu,$$

worin U_ν selbst eine unendliche Summe ist, nämlich, da

$$\frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1}, \quad \frac{\nu!}{(\nu+2)!} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \cdots$$

ist,

$$(2)\quad U_\nu = x^\nu + \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf § 127, 5. können wir die Formel (1) auch so darstellen:

$$\nu! e^x = D_\nu x^\nu + D_{\nu-1}x^\nu + \cdots + D_1 x^\nu + U_\nu$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{\nu} D_s x^\nu + U_\nu.$$

In der Summe Σ geht s von 1 bis ν. Ist aber m irgend eine ganze Zahl, die größer als ν ist, so sind die Abgeleiteten $D_{\nu+1}x^\nu$, $D_{\nu+2}x^\nu, \ldots D_m x^\nu$ gleich Null, und wir können diese Glieder noch beifügen und daher

$$(3)\qquad \nu! e^x = \sum_{s=1}^{m} D_s x^\nu + U_\nu$$

setzen.

2. Wir stellen jetzt die Gleichung (3) für $\nu = 1, 2, \cdots m$ auf, multiplizieren der Reihe nach mit unbestimmten Faktoren $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ und addieren. Dann ergibt sich:

$$(4)\qquad \begin{aligned} & e^x(\gamma_1 1! + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m!) \\ &= \sum_{s=1}^{m} D_s(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m) \\ &+ \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m. \end{aligned}$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\varphi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m,$$

so ist $\varphi(x)$ eine der Bedingung $\varphi(0) = 0$ genügende, sonst aber willkürliche ganze Funktion von x.

Wird dann

$$(5)\qquad \varphi'(x) + \varphi''(x) + \varphi'''(x) + \cdots + \varphi^{(m)}(x) = \Phi(x)$$

gesetzt, so ist

$$\Phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m!,$$

und wenn endlich noch

$$U(x) = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m$$

gesetzt wird, so läßt sich die Gleichung (4) so darstellen:

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x). \tag{6}$$

3. In der zuletzt abgeleiteten Formel, die das Fundament für alles folgende bildet, ist $\Phi(0)$ von x unabhängig, $\Phi(x)$ ist eine ganze Funktion von x vom Grade $(m-1)$ und U ist eine durch eine unendliche Reihe ausgedrückte Funktion von x.

Für den absoluten Wert $|U|$ dieser Funktion können wir aber eine obere Grenze angeben, gestützt auf den Satz, daß der absolute Wert einer Summe niemals größer ist als die Summe der absoluten Werte der Summanden.

Es ist nämlich für jedes positive ν

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} < \frac{1}{3!}, \cdots,$$

und wenn wir also mit r den absoluten Wert von x bezeichnen, also

$$|x| = r$$

setzen, so folgt aus (2):

$$|U_\nu| < r^\nu \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right),$$

also

$$|U_\nu| < r^\nu e^r.$$

Bezeichnen wir also mit

$$c_1, c_2, \ldots c_m$$

die absoluten Werte von

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m,$$

so ergibt sich aus der Definition von $U(x)$:

$$|U(x)| < (c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_m r^m) e^r,$$

oder wenn wir

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_m r^m \tag{7}$$

setzen:

$$|U(x)| < F(r) e^r. \tag{8}$$

Hierin geht dann $F(r)$ aus $\varphi(x)$ dadurch hervor, daß man für die Veränderliche x und die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ die absoluten Werte $r, c_1, c_2, \ldots c_m$ setzt.

§ 129. Transcendenz von e.

1. Um nun zu beweisen, daß e eine transcendente Zahl ist, gehen wir indirekt zu Werke. Wir nehmen an, es sei e die Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades,

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0, \tag{1}$$

worin die $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ ganze Zahlen sind, von denen die erste C_0 und die letzte C_n von Null verschieden sind; wäre nämlich $C_0 = 0$, so müßte man die Gleichung (1) durch eine Potenz von e dividieren, um eine Gleichung von derselben Form zu erhalten, in der das von e unabhängige Glied von Null verschieden ist.

2. Setzen wir in der Grundformel (§ 128 (6)) $x = 1, 2, \ldots n$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e\Phi(0) &= \Phi(1) + U(1), \\ e^2\Phi(0) &= \Phi(2) + U(2), \\ &\cdots\cdots \\ e^n\Phi(0) &= \Phi(n) + U(n), \end{aligned}$$

und wenn wir diese Gleichungen mit $C_1, C_2, \ldots C_n$ multiplizieren, addieren und beiderseits $C_0\Phi(0)$ zufügen, so erhalten wir wegen (1):

$$\begin{aligned} &C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \cdots + C_n\Phi(n) + \\ &\qquad C_1 U(1) + C_2 U(2) + \cdots + C_n U(n) \\ &\qquad = (C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n)\,\Phi(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

oder auch so geschrieben:

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) + \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu U(\nu) = 0, \tag{3}$$

und es ist

$$\Phi(\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^{(\mu)}(\nu), \tag{4}$$

worin $\varphi(x)$ eine der Bedingung $\varphi(0) = 0$ genügende, sonst aber willkürliche ganze Funktion von x und $\varphi^{(\mu)}(x)$ die μ^{te} Ableitung von $\varphi(x)$ ist.

3. Wenn wir nun zeigen können, daß bei irgend einer Annahme über die noch ganz willkürlichen Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, d. h. über die willkürliche Funktion $\varphi(x)$ die Gleichung (3) unmöglich ist, so folgt, daß die Annahme einer Gleichung (1) unzulässig war, daß also e eine transcendente Zahl ist.

Dies wird aber erwiesen sein, wenn wir über $\varphi(x)$ so verfügen können, daß

1) die erste Summe $\Sigma C_\nu \Phi(\nu)$ eine nicht verschwindende ganze Zahl, also dem absoluten Werte nach wenigstens gleich 1 ist, während

2) die zweite Summe $\Sigma C_\nu U(\nu)$ dem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist; denn dann können die beiden Summen zusammen nicht Null ergeben.

4. Nach § 16, 3. gibt es Primzahlen, die größer sind als eine beliebig gegebene Zahl. Wir nehmen hiernach eine Primzahl p an, die größer ist als n und setzen:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p}{(p-1)!},$$

wodurch die Bedingung $\varphi(0) = 0$ befriedigt ist.

Der Grad m dieser Funktion ist $np + p - 1$. Wir wollen uns diese Funktion geordnet denken nach aufsteigenden Potenzen von x oder von $x-1, x-2, \cdots x-n$. Wir erhalten dann folgende verschiedene Darstellungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} (p-1)!\,\varphi(x) &= x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p \\ &= a_{p-1}x^{p-1} + a_p x^p + \cdots + a_m x^m \\ &= b_p(x-\nu)^p + b_{p+1}(x-\nu)^{p+1} + \cdots + b_m(x-\nu)^m, \\ &\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots n). \end{aligned}$$

Niedrigere Potenzen von x und von $x-\nu$ kommen nicht darin vor, da $\varphi(x)$ durch x^{p-1} und durch $(x-1)^p, \ldots (x-n)^p$ teilbar ist Es sind darin $a_{p-1}, a_p, \ldots a_m, b_p, b_{p+1}, \ldots b_m$ ganze Zahlen.

5. Aus (5) ergibt sich durch Division mit x^{p-1}:

$$(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p = a_{p-1} + a_p x + \cdots + a_m x^{m-p+1},$$

und wenn man in dieser identischen Gleichung $x = 0$ setzt:

$$a_{p-1} = \pm 1^p \cdot 2^p \cdots n^p = \pm (n!)^p.$$

Dies ist, weil p eine Primzahl und größer als n ist, also in keinem der Faktoren $1, 2, \ldots n$ aufgeht, eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

Es ist aber weiter, weil $\varphi(x)$ erst mit der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz von x anfängt:

$$\gamma_1 = 0, \cdots \gamma_{p-2} = 0,$$

$$\gamma_{p-1} = \frac{a_{p-1}}{(p-1)!}, \quad \gamma_p = \frac{a_p}{(p-1)!}, \cdots \gamma_m = \frac{a_m}{(p-1)!},$$

und demnach, wenn man die Abgeleiteten von $\varphi(x)$ nach § 127 (5) bildet und $x = 0$ setzt:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \cdots \varphi^{(p-2)}(0) = 0.$$
$$\varphi^{(p-1)}(0) = a_{p-1},$$
$$\varphi^{(p)}(0) \quad = \frac{p!\, a_p}{(p-1)!} = p a_p,$$
$$\varphi^{(p+1)}(0) = p(p+1)\, a_{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(m)}(0) \quad = p(p+1)\cdots m a_m.$$

Es sind also die Derivierten $\varphi^{(\mu)}(0)$ ganze Zahlen, $\varphi^{(p-1)}(0)$ nicht durch p teilbar, und alle andern $\varphi^{(\mu)}(0)$ sind entweder gleich Null oder durch p teilbar, und folglich ist auch die Summe $\Phi(0) = \Sigma \varphi^{(\mu)}(0)$ eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

6. Wenn wir in der Formel § 127 (4):

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

$x = \nu$, $h = x - \nu$ setzen, so ergibt sich

$$\varphi(x) = \varphi(\nu) + (x-\nu)\,\varphi'(\nu) + \frac{(x-\nu)^2}{2!}\varphi''(\nu) + \cdots + \frac{(x-\nu)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\nu),$$

und aus der dritten Darstellung (5) folgt für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$\varphi(\nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0, \cdots \varphi^{(p-1)}(\nu) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(\nu) \quad = p b_p,$$
$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = p(p+1) b_{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(m)}(\nu) \quad = p(p+1)\cdots m b_m,$$

und folglich sind alle $\varphi^{(\mu)}(\nu)$ entweder Null oder durch p teilbare ganze Zahlen.

Es sind also auch die Summen

$$\Phi(1),\ \Phi(2),\ \ldots\ \Phi(\nu)$$

durch p teilbare ganze Zahlen.

7. Hieraus folgt, daß auch

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) = C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \cdots + C_n\Phi(n)$$

eine ganze Zahl ist, und wenn wir p so groß annehmen, daß die (von Null verschiedene) Zahl C_0 nicht durch p teilbar ist, so ist auch diese Summe nicht durch p teilbar, also von Null verschieden.

Dies ist nach 3. der erste Teil des zu führenden Beweises.

8. Der zweite Teil, der sich auf das Verhalten von U bezieht, ist nun einfach nach der Ungleichung § 128 (8) zu führen. Es kommt hier zunächst darauf an, die Funktion $F(r)$ zu bilden, die sich aus $\varphi(x)$ ergibt, wenn man $x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ durch ihre absoluten Werte $r, c_0, c_1, \ldots c_m$ ersetzt.

Wenn man die Funktion

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} - \cdots,$$

deren Vorzeichen alternieren, mit $x - \beta$ multipliziert, so erhält man wieder eine Funktion mit alternierenden Vorzeichen:

$$x^{k+1} - (\alpha_1 + \beta) x^k + (\alpha_2 + \beta) x^{k-1} - \cdots,$$

und wenn man die Vorzeichen in beiden Faktoren gleich macht, also

$$x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \cdots \quad \text{und} \quad x + \beta$$

miteinander multipliziert, so erhält man ein Produkt

$$x^{k+1} + (\alpha_1 + \beta) x^k + (\alpha_2 + \beta) x^{k-1} + \cdots,$$

das aus dem ersten dadurch entsteht, daß man darin ebenfalls alle Vorzeichen gleich macht.

9. Wenn man diesen einfachen Satz wiederholt anwendet, so folgt, dass das ausgerechnete und geordnete Produkt

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-n)^p}{(p-1)!}$$

alternierende Vorzeichen hat und in das Produkt

$$F(x) = \frac{x^{p-1}(x+1)^p (x+2)^p \cdots (x+n)^p}{(p-1)!}$$

übergeht, wenn man allen Koeffizienten das positive Vorzeichen gibt, mit anderen Worten, daß uns das Produkt die gesuchte Funktion

$$F(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p (r+2)^p \cdots (r+n)^p}{(p-1)!}$$

liefert, und daß also

$$|U(x)| < F(r) e^r \tag{6}$$

ist.

10. Setzen wir zur Abkürzung

$$\nu(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+n) = \varrho_\nu,$$

so ist nach (6)

$$|U(\nu)| < \frac{\varrho_\nu^p}{\nu(p-1)!} e^\nu.$$

Nun nähert sich aber, da die Reihe für e^x (§ 128, 1.) für alle x konvergiert, ihr allgemeines Glied $x^m : m!$ mit unendlich wachsendem

m für jedes x der Grenze Null (vgl. auch § 48, 2). Man kann also auch die Primzahl p so groß nehmen, daß

$$\frac{\varrho_\nu^{p-1}}{(p-1)!}$$

beliebig klein wird, und da $e^\nu \varrho_\nu : \nu$ endlich ist, so kann auch $|U(\nu)|$ und folglich auch die Summe $\Sigma C_\nu U(\nu)$ beliebig klein, also insbesondere auch kleiner als 1 gemacht werden.

Dies ist nach 3. der zweite Teil des Beweises, und es ist also bewiesen:

Die Zahl e ist eine transcendente Zahl.

§ 130. Transcendenz von π.

1. Auf den gleichen Grundlagen beruht der Beweis, daß die Zahl π eine transcendente Zahl ist, und zwar stützt sich dieser Beweis auf die durch die Gleichung

$$1 + e^{i\pi} = 0 \tag{1}$$

ausgedrückte Beziehung zwischen e und π (§ 114, (12)).

Wenn π eine algebraische Zahl ist, so ist auch $i\pi$ eine algebraische Zahl. Denn ist $\chi(\pi) = 0$ eine rationale Gleichung, der die Zahl π genügt, so setzen wir, indem wir die geraden von den ungeraden Potenzen trennen,

$$\chi(\pi) = \chi_1(\pi^2) + \pi\chi_2(\pi^2).$$

Ist nun $i\pi = y$, so ist also

$$\chi_1(-y^2) - iy\chi_2(-y^2) = 0$$

und folglich auch

$$\psi(y) = [\chi_1(-y^2)]^2 + y^2[\chi_2(-y^2)]^2 = 0.$$

2. Es sei ψ vom ν^{ten} Grade und

$$y_1, y_2, y_3, \cdots y_\nu \tag{2}$$

seien die Wurzeln von ψ, unter denen also die Zahl πi vorkommt. Demnach ist wegen (1)

$$(1 + e^{y_1})(1 + e^{y_2})(1 + e^{y_3}) \cdots (1 + e^{y_\nu}) = 0,$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren:

$$1 + \Sigma e^{y_i} + \Sigma e^{y_i + y_k} + \Sigma e^{y_i + y_k + y_l} + \cdots = 0, \tag{3}$$

worin die erste Summe Σe^{y_i} sich auf alle Wurzeln (2) erstreckt, die zweite $\Sigma e^{y_i + y_k}$ auf alle Kombinationen je zweier $y_i + y_k$ (ohne Wiederholung), die dritte $\Sigma e^{y_i + y_k + y_l}$ auf alle Kombinationen zu dreien u. s. f.

3. Die symmetrischen Funktionen der ν Größen y_i sind nach unserer Voraussetzung rationale Zahlen (ganz oder gebrochen), und die ν Größen y_i genügen also einer rationalen Gleichung $\psi(x) = 0$.

Die symmetrischen Funktionen der $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Grössen $y_i + y_k$ (z. B. ihre Potenzsummen) sind zugleich symmetrische Funktionen der y_i, also ebenfalls rationale Zahlen und es sind also die $y_i + y_k$ ebenfalls die Wurzeln einer rationalen Gleichung $\psi_1(x) = 0$.

Das Gleiche gilt von den Summen $y_i + y_k + y_l$, deren Anzahl $\frac{1}{6}\nu(\nu - 1)(\nu - 2)$ ist, und auch diese sind die Wurzeln einer Gleichung $\psi_2(x) = 0$ u. s. f.

Das Produkt

$$\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ldots \tag{4}$$

ist also eine ganze Funktion von x, die verschwindet, wenn für x eine der Zahlen

$$y_i,\quad y_i + y_k,\quad y_i + y_k + y_l,\ \cdots \tag{5}$$

gesetzt wird.

4. Unter diesen Zahlen (5) kann die Zahl Null ein oder mehrmals enthalten sein. Wenn wir annehmen, daß $C - 1$ mal die Zahl Null darunter vorkomme, so ist C eine positive ganze Zahl, mindestens $= 1$. Sie wird nur dann $= 1$, wenn die Null unter den Größen (5) nicht vorkommt.

Das Produkt (4) enthält dann $C - 1$ mal den Faktor x, und wenn wir diesen absondern und die Koeffizienten dann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner N zu ganzen Zahlen machen, so ergibt sich eine Funktion n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$\chi(x) = N x^{1-C} \psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\cdots,$$

deren Wurzeln

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n \tag{6}$$

die von Null verschiedenen unter den Größen (5) sind und die nach (3) der Gleichung genügen:

$$C + e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \cdots + e^{x_n} = 0. \tag{7}$$

Da Null unter den Wurzeln (6) nicht vorkommt, so ist $\chi(0)$ von Null verschieden.

Es kommt nicht darauf an, ob unter den Größen (6) dieselbe Zahl mehrmals vorkommt; jedenfalls kommt aber die Zahl πi darunter vor.

5. Nun gehen wir zurück auf die Gleichung § 128 (6):

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x), \tag{8}$$

setzen darin $x = x_1, x_2, \cdots x_n$, addieren und fügen beiderseits $C\Phi(0)$ hinzu. So erhalten wir nach (7):

$$
\begin{aligned}
& C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots \Phi(x_n) \\
(9) \qquad & + U(x_1) + U(x_2) + \cdots + U(x_n) \\
& = \Phi(0)(C + e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}) = 0,
\end{aligned}
$$

und der Grundgedanke des Beweises ist nun ganz derselbe wie bei der Zahl e. Wir beweisen, daß man über die Funktion $\varphi(x)$ so verfügen kann, daß

1) $C\Phi(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu)$ eine nicht verschwindende ganze Zahl wird,

2) $\sum_{\nu=1}^{n} U(x_\nu)$ kleiner als 1 wird;

dann erweist sich die Gleichung (9) als unmöglich, und die Annahme, π sei eine algebraische Zahl, ist widerlegt.

6. Die Funktion $\chi(x)$ hat die Form

$$\chi(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

worin die Koeffizienten $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ ganzzahlig, a und a_n von Null verschieden und a positiv angenommen werden können; multiplizieren wir mit a^{n-1} und setzen

$$ax = z, \quad a_1 = b_1, \quad aa_2 = b_2, \quad a^2 a_3 = b_3, \cdots, \quad a^{n-1} a_n = b_n,$$

so ergibt sich eine Funktion

$$(10) \qquad a^{n-1}\chi(x) = \theta(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, und deren Wurzeln

$$(11) \qquad z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$$

die Produkte

$$(12) \qquad ax_1, ax_2, \ldots ax_n$$

sind.

7. Wir machen jetzt über die zur Bildung von $\Phi(x)$ in der Formel (9) verwendete Funktion $\varphi(x)$ die Annahme:

$$(13) \qquad \varphi(x) = \frac{z^{p-1}(\theta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{np-1} x^{p-1} (\chi(x))^p}{(p-1)!},$$

worin p eine hinlänglich große Primzahl ist. Der Grad m von $\varphi(x)$ ist gleich $np + p - 1$, und außerdem ist $\varphi(0) = 0$.

Es sei dann, wenn wir nach Potenzen von z ordnen:

$$
\begin{aligned}
(\theta(z))^p &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \\
&= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

worin die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, und wenn man $z = 0$ setzt, so folgt

$$A_0 = b_n^p.$$

Es ist also A_0 von Null verschieden. Es wird ferner

$$(p-1)!\,\varphi(x) = A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \cdots$$

und folglich

$$\begin{aligned} &\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \cdots, \quad \varphi^{(p-2)}(0) = 0,\\ &\varphi^{(p-1)}(0) = A_0 a^{p-1} = b_n^p a^{p-1},\\ &\varphi^{(p)}(0) = p A_1 a^p,\\ &\varphi^{(p+1)}(0) = p(p+1) A_2 a^{p+1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

8. Nehmen wir also p größer als die größere der beiden Zahlen a, b_n, so ist $\varphi^{(p-1)}(0)$ nicht durch p teilbar, während alle übrigen $\varphi^{(\mu)}(0)$ entweder gleich Null oder durch p teilbar sind. Folglich ist

$$\Phi(0) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(0)$$

eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

9. Nach § 61, 3. ergibt sich

$$\frac{\theta(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \cdots,$$

worin die Koeffizienten

$$\begin{aligned} q_1 &= z_1 + b_1,\\ q_2 &= z_1^2 + b_1 q_1 + b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ganze Funktionen von z_1 mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Hiernach erhalten wir, wenn wir die p^{te} Potenz nehmen, mit

$$z^{p-1} = (z_1 + (z - z_1))^{p-1}$$

multiplizieren und dann nach aufsteigender Potenz von $z - z_1$ ordnen:

$$\begin{aligned} (p-1)!\,\varphi(x) &= (z - z_1)^p B_1(z_1) + (z - z_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots\\ &= a^p (x - x_1)^p B_1(z) + a^{p+1}(x - x_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten $B_1(z_1)$, $B_2(z_1)$, ... ganze Funktionen von z_1 sind, z. B.

$$\begin{aligned} B_1(z_1) &= \beta_1^{(0)} + \beta_1^{(1)} z_1 + \beta_1^{(2)} z_1^2 + \cdots,\\ B_2(z_1) &= \beta_2^{(0)} + \beta_2^{(1)} z_1 + \beta_2^{(2)} z_1^2 + \cdots, \end{aligned}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten β.

Daraus folgt nun wie oben:

$$\varphi'(x_1) = 0, \quad \varphi''(x_1) = 0, \cdots \varphi^{(p-1)}(x_1) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(x_1) = p a^p B_1(z_1),$$
$$\varphi^{(p+1)}(x_1) = p(p+1) a^{p+1} B_1(z_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und folglich, wenn wir

$$Q(z_1) = a^p B_1(z_1) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_1) + \cdots$$

setzen:

$$\Phi(x_1) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(x_1) = p Q(z_1), \tag{14}$$

worin

$$Q(z_1) = Q_0 + Q_1 z_1 + Q_2 z_1^2 + Q_3 z_1^3 + \cdots$$

eine ganze Funktion von z_1 ist, deren Koeffizienten $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ ganze Zahlen sind.

Diese Formeln gelten unverändert, wenn x_1, z_1 durch x_2, z_2; u. s. f. ... x_n, z_n ersetzt werden.

Wenn man dann die aus (14) sich ergebenden Formeln addiert, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{m} \Phi(x_\nu) = n Q_0 + Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + Q_3 s_3 + \cdots,$$

worin $s_1 = \Sigma z_\nu$, $s_2 = \Sigma z_\nu^2$, $s_3 = \Sigma z_\nu^3, \ldots$ die Potenzsummen der z sind. Diese werden aber nach (10) aus den Newtonschen Formeln (§ 65, (6)) bestimmt:

$$s_1 + b_1 = 0,$$
$$s_2 + s_1 b_1 + 2 b_2 = 0,$$
$$s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3 b_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und ergeben sich also als ganze Zahlen. Daraus folgt

10. Die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu)$$

ist eine durch p teilbare ganze Zahl.

Nehmen wir daher p größer an als die (von Null verschiedene) Zahl C, so ergibt sich aus 8. und 10.:

11. Die Summe

$$C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_n)$$

ist eine durch p nicht teilbare ganze Zahl, also ihr absoluter Wert mindestens gleich 1.

Damit ist nach Nr. 5 der erste Teil des Beweises geführt.

12. Um auch den zweiten Teil zu erledigen, müssen wir die Funktion $F(r)$ betrachten, die man erhält, wenn man in der geordneten Funktion $\varphi(x)$ die Variable x und die Koeffizienten durch ihre absoluten Werte ersetzt.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

und erhalten für $\varphi(x)$ nach (13) die Formel:

$$(p - 1)!\, \varphi(x) = a^{np+p-1} x^{p-1}(x - x_1)^p (x - x_2)^p \cdots (x - x_n)^p.$$

Die Koeffizienten dieses Ausdruckes entstehen durch Multiplikation und Addition aus den Größen:

$$a, \; -x_1, \; -x_2, \cdots -x_n,$$

und die absoluten Werte dieser Koeffizienten sind daher nach § 47, 5. 6. kleiner (oder jedenfalls nicht größer) als die Zahlen, die man erhält, wenn man diese Größen durch ihre absoluten Werte

$$a, \; r_1, \; r_2, \ldots r_n$$

ersetzt, d. h. sie sind nicht größer als die Koeffizienten der Funktion:

$$a^{np+p-1} x^{p-1} (x + r_1)^p (x + r_2)^p \cdots (x + r_n)^p.$$

Setzen wir also

$$\varrho(r) = a^{n+1} r (r + r_1)(r + r_2) \cdots (r + r_n),$$

so ist für jedes positive r

$$F(r) < \frac{(\varrho(r))^p}{ar(p-1)!}$$

und kann daher durch hinlängliche Vergrößerung von p beliebig klein gemacht werden.

Es kann also auch nach § 128, (8) der absolute Wert von $U(x_\nu)$ und damit der absolute Wert der Summe $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ beliebig klein, also auch kleiner als 1 gemacht werden, und damit ist auch der zweite Punkt in Nr. 5 erledigt und vollständig nachgewiesen:

Die Zahl π ist eine transcendente Zahl.

Zusätze.

§ 131. Kongruenzen höheren Grades.

1. In den §§ 70, 71 haben wir bewiesen, daß die Kongruenz

$$ax \equiv c \pmod p,$$

deren Modul p eine Primzahl ist, wenn a durch p nicht teilbar ist, eine und nur eine Lösung aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \cdots p-1$ hat. Alle anderen Lösungen dieser Kongruenz sind mit dieser einen fundamentalen nach dem Modul p kongruent. Diese Kongruenz heißt eine Kongruenz ersten Grades oder eine lineare Kongruenz, und wir haben also hier eine vollkommene Analogie mit dem Satze, daß eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten nur eine Lösung hat, wenn wir unter der Lösung einer Kongruenz nicht die einzelne Zahl, sondern die Gesamtheit aller untereinander kongruenten Zahlen verstehen.

2. Die Analogie zwischen Kongruenzen höheren Grades und den algebraischen Gleichungen ist nicht mehr so vollständig. Es sei

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades, deren Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ ganze Zahlen sind. Gibt es eine ganze Zahl a, die, für x eingesetzt, $f(x)$ durch die Primzahl p teilbar macht, so heißt a eine Wurzel der Kongruenz n^{ten} Grades

$$f(x) \equiv 0 \pmod p.$$

Genügt a dieser Bedingung, so genügt ihr auch jede mit a nach p kongruente Zahl (§ 67), und die Gesamtheit dieser untereinander kongruenten Zahlen wird als eine Wurzel aufgefaßt.

Daß es Kongruenzen dieser Art gibt, die überhaupt keine Wurzel haben, zeigt das einfache Beispiel $f(x) = x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Denn $x^2 + 1$ kann für kein ganzzahliges x durch 3 teilbar sein. Hier besteht also kein dem Fundamentalsatz der Algebra entsprechendes Theorem. Wohl aber gilt der Satz:

Eine Kongruenz n^{ten} Grades für einen Primzahlmodul p kann niemals mehr als n Wurzeln haben.

Der Satz ist richtig für $n = 1$. Er ist also allgemein erwiesen, wenn wir ihn für eine Funktion n^{ten} Grades unter der Voraussetzung beweisen können, daß er für eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades schon erwiesen sei. Dieser Beweis ergibt sich so: Nach § 61, 3. können wir, wenn x und a zwei unbestimmte Größen sind,

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + f(a)$$

setzen, worin $Q(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Sind $f(a)$ und $f(x)$ beide durch p teilbar, so ist hiernach auch $(x-a)\,Q(x)$ durch p teilbar, und wenn also x nicht kongruent mit a, also $(x-a)$ nicht durch p teilbar ist, so ist $Q(x)$ durch p teilbar.

Nehmen wir also den zu beweisenden Satz für eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades als richtig an, so gibt es höchstens $(n-1)$ inkongruente Werte von x, für die $Q(x)$ durch p teilbar wird und folglich höchstens n, für die $f(x) \equiv 0$ wird.

§ 132. Existenz von Primitivwurzeln einer Primzahl.

1. Im § 68 ist der Fermatsche Satz bewiesen, daß, wenn p eine Primzahl und a eine durch p nicht teilbare Zahl bedeutet,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist. Wenn f die kleinste positive Zahl ist, für die

$$a^f \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so heißt a zu dem Exponenten f gehörig, und wenn für irgend einen Exponenten h die Kongruenz

$$a^h \equiv 1 \pmod{p}$$

besteht, so ist h ein Vielfaches von f. Es ist also auch insbesondere f immer ein Teiler von $p-1$.

Eine Zahl g, die zu dem Exponenten $p-1$ gehört, heißt eine primitive Wurzel der Primzahl p.

Wir haben einzelne Beispiele solcher primitiven Wurzeln kennen gelernt, aber noch keinen allgemeinen Beweis gegeben, daß es für jede Primzahl p primitive Wurzeln gibt. Diesen Beweis wollen wir jetzt noch nachholen[1]).

1) Gauß hat in den „Disquisitiones arithmeticae" zwei Beweise dieses Satzes gegeben, von denen wir hier dem zweiten folgen.

2. Der Fall $p = 2$ bietet kein Interesse. Denn für $p = 2$ ist die Zahl 1 primitive Wurzel. Es sei also p eine ungerade Primzahl, $p - 1$ also gerade. Wir zerlegen $p - 1$ in Primfaktoren und setzen

$$p - 1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots,$$

worin $a, b, c, \ldots$ voneinander verschiedene Primzahlen, $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$ die höchsten in $p - 1$ aufgehenden Potenzen dieser Primzahlen sind. Wir beweisen zunächst:

1) Es gibt eine Zahl A, die zu dem Exponenten a^α gehört.

Die Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist von niedrigerem Grade als $p - 1$, und es gibt also nach § 131 unter den $p - 1$ Zahlen $1, 2, \cdots p - 1$ eine, die dieser Kongruenz nicht genügt. Es sei y eine solche Zahl. Wenn wir dann

$$A \equiv y^{b^\beta c^\gamma \cdots}$$

setzen, so ist

$$A^{a^\alpha} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wenn nun A zum Exponenten f gehört, so muß f ein Teiler von a^α, d. h. eine Potenz von a sein. Wäre aber $f < a^\alpha$, also ein Teiler von $a^{\alpha-1}$, so wäre

$$A^{a^{\alpha-1}} \equiv 1,$$

also

$$y^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \cdots} = y^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p}$$

gegen die Voraussetzung. Es gehört also A zum Exponenten a^α.

Ebenso kann man nun Zahlen $B, C, \ldots$ bestimmen, die zu den Exponenten $b^\beta, c^\gamma, \ldots$ gehören.

2) Das Produkt $g = ABC \cdots$ gehört zum Exponenten $p - 1$.

Nehmen wir an, es gehöre g nicht zum Exponenten $p - 1$, sondern zu einem kleineren Exponenten h, so ist h ein Teiler von $p - 1$ und $(p - 1) : h$ ist eine ganze Zahl und größer als 1. In dieser Zahl können aber keine anderen Primzahlen als $a, b, c, \ldots$ aufgehen, und da sie größer als 1 ist, so ist sie wenigstens durch eine von ihnen, etwa durch a teilbar. Setzen wir also $p - 1 = hk$, so ist k eine durch a teilbare ganze Zahl, und h ist ein Teiler von $(p - 1) : a$. Aus $g^h \equiv 1$ folgt daher:

$$g^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p},$$

also
$$A^{\frac{p-1}{a}} B^{\frac{p-1}{a}} C^{\frac{p-1}{a}} \cdots \equiv 1.$$

Da aber $(p-1):a$ durch b^β, durch c^γ,, ... teilbar ist, so ist
$$B^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad C^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \cdots,$$
und es folgt also
$$A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1.$$

Der Exponent, zu dem A gehört, müßte also ein Teiler von $(p-1):a$ sein, während er doch a^α ist, was nicht in diesem Quotienten enthalten ist.

3. Hiermit ist die Existenz einer primitiven Wurzel g für eine jede Primzahl p nachgewiesen. Jede mit g kongruente Zahl ist dann auch primitive Wurzel. Die Gesamtheit dieser untereinander kongruenten Zahlen wird aber wieder nur als ein Individuum, eine primitive Wurzel, angesehen.

Die Zahlen
$$1, g, g^2, g^3, \ldots g^{p-2}$$
sind alle inkongruent, und da sie alle durch p unteilbar sind und ihre Anzahl $p-1$ beträgt, so kommt unter ihren Resten jede der Zahlen
$$k = 1, 2, 3, \cdots p-1$$
einmal und nur einmal vor.

4. Es ist nun auch leicht, den Exponenten f zu bestimmen, zu dem irgend eine dieser Zahlen g^k gehört. Ist nämlich e der größte gemeinschaftliche Teiler von k und $p-1$ und ist $k = ek'$, $p-1 = ef$, so ist $k' < f$ und relativ prim zu f, und es ist $g^{hk} = g^{hek'}$ nur dann mit 1 kongruent, wenn h durch f teilbar ist. Demnach gehört g^k zum Exponenten f, und da die Anzahl der Werte, die k' haben kann, gleich $\varphi(f)$ ist (§ 67, 7.), so gibt es $\varphi(f)$ inkongruente Zahlen, die zum Exponenten f gehören. Nimmt man $f = p-1$, so folgt, daß es $\varphi(p-1)$ inkongruente primitive Wurzeln von p gibt.

§ 133. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln.

1. In § 100 ist gezeigt, daß die Funktion $\varphi(x) = x^n - a$ vom Primzahlgrade n in einem Rationalitätsbereiche irreduzibel ist, in dem a enthalten, aber nicht die n^{te} Potenz einer Zahl b des Rationalitätsbereiches ist. Eine Wurzel $\sqrt[n]{a}$ der Gleichung $x^n = a$ möge ein Radikal vom Grade n in dem Rationalitätsbereiche heißen.

Eine Zahl heißt durch Radikale darstellbar, wenn sie in einem Rationalitätsbereiche enthalten ist, der aus dem Bereiche der rationalen Zahlen durch successive Adjunktion von Radikalen des jeweils vorangegangenen Rationalitätsbereiches abgeleitet ist.

Es wurde dann weiter in § 101 der Beweis geführt, daß es Gleichungen gibt, deren Wurzeln nicht durch Radikale darstellbar sind.

2. Es bleibt aber dabei noch die Frage offen, ob die Wurzeln einer solchen Gleichung nicht vielleicht darstellbar sein könnten, wenn man auch die Wurzeln von reduzibeln reinen Gleichungen von Primzahlgrade n zuläßt. Ist $x^n - a = 0$ eine solche Gleichung, so muß $a = b^n$ und b eine Zahl des Rationalitätsbereiches sein, in dem auch a enthalten ist. Wenn man dann $x = bx_1$ setzt, so geht $\varphi(x) = 0$ in $x_1^n - 1 = 0$ über, und die Adjunktion einer Wurzel x ist gleichbedeutend mit der Adjunktion von x_1, d. h. mit der Adjunktion einer n^{ten} Einheitswurzel. Es bleibt also noch die Frage zu beantworten:

Gibt es Gleichungen, deren Wurzeln nicht in einem Rationalitätsbereiche enthalten sind, das aus dem Gebiet der rationalen Zahlen durch successive Adjunktion von Radikalen und Einheitswurzeln abgeleitet ist?

Wenn wir aber nun nachweisen können, daß jede Einheitswurzel durch Radikale darstellbar ist, so ist die letzte Frage auf die andere zurückgeführt, ob es Gleichungen gibt, deren Wurzeln nicht durch Radikale darstellbar sind. In § 101 haben wir gesehen, daß es solche Gleichungen in der Tat gibt.

3. Wir beweisen jetzt noch den folgenden Satz:

Mag m eine Primzahl oder zusammengesetzt sein, so sind alle m^{ten} Einheitswurzeln durch Radikale darstellbar, und die Grade dieser Radikale sind kleiner als m.

4. Die m^{ten} Einheitswurzeln (oder auch Einheitswurzeln vom Grade m) sind die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades

$$x^m - 1 = 0.$$

Sie sind, wie wir schon in § 95 gesehen haben, alle in der Form enthalten:

$$r^k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

worin

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

ist und k die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \cdots m-1$ durchläuft.

Haben k und m einen größten gemeinschaftlichen Teiler d, der größer als 1 ist und ist $k = dk'$, $m = dm'$, so ist

$$r^k = \cos\frac{2\pi k'}{m'} + i\sin\frac{2\pi k'}{m'},$$

und dies ist zugleich eine Einheitswurzel vom Grade m'.

Ist aber k relativ prim zu m, so kann

$$r^{kh} = \cos\frac{2\pi kh}{m} + i\sin\frac{2\pi kh}{m}$$

nur dann gleich 1 sein, wenn $h = m$ oder ein Vielfaches von m ist. In diesem Falle ist also r^k nicht zugleich Einheitswurzel von niedrigerem Grade.

Man unterscheidet daher primitive und imprimitive m^{te} Einheitswurzeln. Die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln sind solche, die nicht zugleich Einheitswurzeln niedrigeren Grades sind. Man erhält sie, wenn man in r^k den Exponenten k die Reihe der relativen Primzahlen zu m durchlaufen läßt; und ihre Anzahl ist also gleich $\varphi(m)$ (§ 67, 7.).

5. Der zu beweisende Satz 3. ist richtig in den ersten Fällen, denn für $m = 1$ und $m = 2$ haben wir nur die rationalen Einheitswurzeln $+1$, -1, für $m = 3$ haben wir die Einheitswurzeln

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

die also aus der reinen Gleichung $x^2 + 3 = 0$ abgeleitet werden. Die vierten Einheitswurzeln $+i$, $-i$ ergeben sich aus der reinen Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Wir können also die vollständige Induktion anwenden nnd annehmen, der Satz 3. sei bewiesen für alle Einheitswurzeln, deren Grad m_1 kleiner als m ist. Können wir ihn unter dieser Voraussetzung beweisen, so ist er allgemein bewiesen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

6. Der Grad m ist eine zusammengesetzte Zahl,

$$m = pm_1,$$

p eine in m aufgehende Primzahl und $m_1 > 1$, also $m_1 < m$, $p < m$.

Ist r eine m^{te} Einheitswurzel, so ist $r^p = a$ eine Einheitswurzel vom Grade m_1 und folglich nach der Voraussetzung durch Radikale darstellbar. Es ist also r die Wurzel der reinen Gleichung

$$x^p - a = 0,$$

und wenn a in dem bis dahin gebildeten Rationalitätsbereiche nicht

die p^{te} Potenz einer rationalen Größe ist, irreduzibel. Folglich ist auch r durch Radikale darstellbar.

Ist aber $a = b^p$ die p^{te} Potenz einer rationalen Größe, und ϱ eine p^{te} Einheitswurzel, so ist $r = \varrho b$, und nach der Voraussetzung ist, da $p < m$ ist, ϱ gleichfalls durch Radikale darstellbar.

7. Es bleibt der Fall übrig, daß m eine Primzahl ist. In diesem Falle sind alle m^{ten} Einheitswurzeln, mit Ausnahme von 1, primitiv, und wenn man eine von diesen mit r bezeichnet, also etwa

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

setzt, so sind die sämtlichen primitiven Einheitswurzeln vom Grade m:

$$(1) \qquad r, r^2, r^3, \ldots r^{m-1}.$$

Wenn sich k und k' um ein Vielfaches von m unterscheiden, so ist $r^k = r^{k'}$, und man erhält also auch alle Wurzeln (1) in der Reihe

$$(2) \qquad r^{k_1}, r^{k_2}, r^{k_3}, \ldots r^{k_{m-1}},$$

wenn $k_1, k_2, k_3, \ldots k_{m-1}$ irgend $(m-1)$ Zahlen sind, die die Zahlen $1, 2, 3, \cdots m-1$ zu Resten nach m haben. Die $m-1$ Zahlen (2) sind die Wurzeln der Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(3) \qquad \frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \cdots + x + 1 = 0.$$

Man kann die Wurzeln dieser Gleichung so anordnen, daß jede von ihnen dieselbe Potenz der vorangehenden ist, wie alle übrigen und die erste wieder dieselbe Potenz der letzten. Eine solche Anordnung heißt eine cyklische Anordnung.

Um dies nachzuweisen, nehme man eine primitive Wurzel g der Primzahl m, die es nach § 132 immer gibt. Dann ist unter den Resten der Potenzen von g

$$1, g, g^2, g^3, \ldots g^{m-2}$$

jede der Zahlen $1, 2, 3, \cdots m-1$ einmal enthalten, und die Größen (1) stimmen also, von der Reihenfolge abgesehen, mit

$$(4) \qquad r, r^g, r^{g^2}, \ldots r^{g^{m-2}}$$

überein, die wir, in der gleichen Reihenfolge, auch kürzer mit

$$(5) \qquad r, r_1, r_2, \ldots r_{m-2}$$

bezeichnen. In dieser Reihe ist jedes Glied die g^{te} Potenz des vorhergehenden, und das erste wieder die g^{te} Potenz des letzten, da nach dem Fermatschen Satze $g^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ist.

8. Es sei jetzt ε irgend eine $(m-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, also, da $m-1<m$ ist, nach unserer Voraussetzung eine durch Radikale darstellbare Zahl.

Wir adjungieren die Zahl ε dem Rationalitätsbereiche und betrachten die Funktion

$$\psi(r)=r+\varepsilon r_1+\varepsilon^2 r_2+\cdots+\varepsilon^{m-2}r_{m-2},$$

die wegen (4) und (5) eine rationale Funktion von r ist.

Wenn wir hierin r durch $r_1=r^g$ ersetzen, so geht r_1 in $r_1{}^g=r_2$, r_2 in $r_2{}^g=r_3, \cdots r_{m-2}$ in $r_{m-2}^g=r$ über, und wir erhalten:

$$\psi(r_1)=r_1+\varepsilon r_2+\varepsilon^2 r_3+\cdots+\varepsilon^{m-2}r$$

und folglich, da $\varepsilon^{m-1}=1$ ist,

$$\psi(r)=\varepsilon\psi(r_1),$$

und ebenso $\psi(r_1)=\varepsilon\psi(r_2)$, $\psi(r_2)=\varepsilon\psi(r_3), \cdots$.

Daraus folgt:

$$\psi(r)^{m-1}=\psi(r_1)^{m-1}=\cdots=\psi(r_{m-2})^{m-1},$$

und es ergibt sich also

$$\psi(r)^{m-1}=\frac{1}{m-1}\left[\psi(r)^{m-1}+\psi(r_1)^{m-1}+\cdots+\psi(r_{m-2})^{m-1}\right].$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes ist aber eine symmetrische Funktion der Wurzeln $r, r_1, r_2, \ldots r_{m-2}$ der Gleichung (3) und kann also nach dem Hauptsatze von den symmetrischen Funktionen (§ 64, 3.) rational ausgedrückt werden. Dieser Ausdruck wird aber außer rationalen Zahlen noch ε enthalten. Bezeichnen wir mit A also eine Größe des durch ε erweiterten Rationalitätsbereiches, so ist

$$\psi(r)^{m-1}=A,$$

und die Bestimmung von $\psi(r)$ ist auf eine Reihe von Radikalen zurückgeführt, deren Grade die in $m-1$ aufgehenden Primzahlen p sind. Wenn bei den hierbei nacheinander auftretenden reinen Gleichungen $x^p-a=0$ eine reduzible vorkommen sollte, so tritt an deren Stelle eine p^{te} Einheitswurzel, die nach Voraussetzung durch Radikale darstellbar ist.

Hieraus folgt, daß die Zahlen $\psi(r)$ durch Radikale darstellbar sind.

9. Es gibt $m-1$ Einheitswurzeln ε vom Grade $m-1$, darunter die Zahl 1, und diese sind die Wurzeln der Gleichung $x^{m-1}-1=0$.

In dieser Gleichung sind alle Koeffizienten, mit Ausnahme des ersten und des letzten, gleich Null, und demnach ergibt sich aus

den Newtonschen Formeln (§ 65, (6)), daß auch alle Potenzsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{m-2}$ gleich Null sein müssen, also:

$$\Sigma\varepsilon = 0, \quad \Sigma\varepsilon^2 = 0, \cdots \Sigma\varepsilon^{m-2} = 0, \tag{6}$$

worin sich die Summen über alle ε erstrecken. Setzen wir nun, um die Abhängigkeit von ε anzudeuten,

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon),$$

setzen wir für ε seine $m - 1$ verschiedenen Werte, und bilden wir die Summe $\Sigma\psi(r, \varepsilon)$ aller dieser Funktionen, so folgt wegen (6):

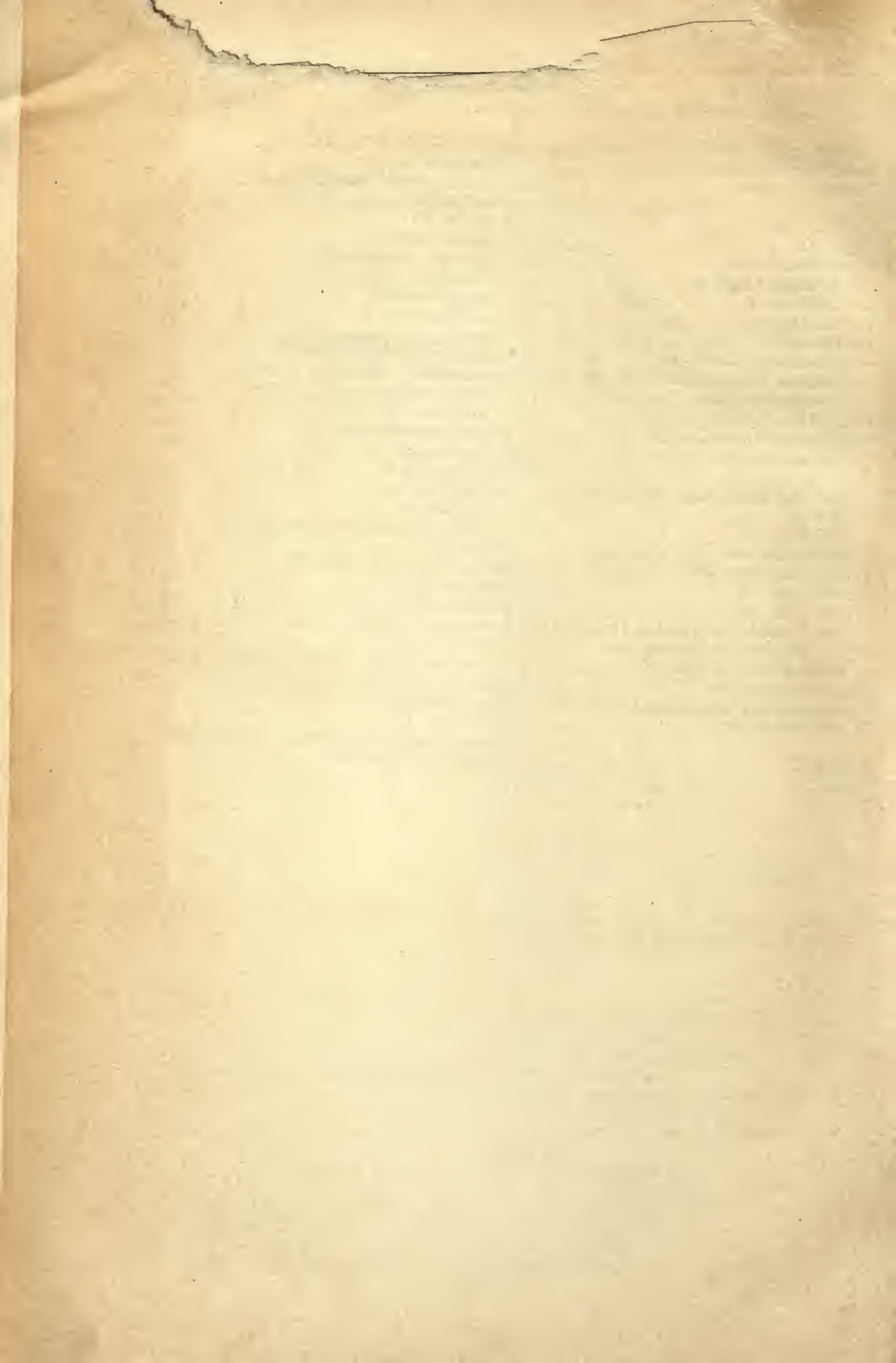
$$r = \frac{1}{m-1} \Sigma\psi(r, \varepsilon),$$

und es ist also auch r durch Radikale darstellbar.

Damit ist das Theorem 3. bewiesen und unser Beweis von der Unmöglichkeit der Auflösung aller Gleichungen 5[ten] Grades durch Radikale vervollständigt.

Alphabetisches Register.

Die Zahlen geben die Seitenzahlen an.



Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein**, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. *M.* 9.—

I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbild. ohne Mafsänderung. Mit 193 Fig. in Holzschn. 3. Aufl. [VIII u. 144 S.] 1897. geb. *M.* 2.40.
II. — Abbildung in verändertem Mafse. Berechnung der Gröfsen der ebenen Geometrie. Mit 188 Fig. in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 2. Auflage. [IX u. 248 S.] 1896. geb. *M.* 3.30.
III. — Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte.) Mit 131 Fig. im Text. 2. Auflage. [XII u. 192 S.] 1901. geb. *M.* 3.30.

Klein, Felix und **E. Riecke**, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterungen der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von F. Kl. und E. R. Mir einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit zahlreichen Textfiguren und einer Tafel. [VII u. 252 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

Müller, Heinrich, Oberlehrer am Königl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Mit zahlreichen Textfiguren. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Die Unterstufe. 1. Auflage. 1899. [VIII u. 152 S.] *M.* 2.50.
— — 2. Auflage in 2 Ausgaben:
Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. 1902. [VIII u. 137 S.] *M.* 1.60.
Ausgabe B. Für Reale Anstalten u. Reformschulen. 1902. [VIII u. 199 S.] *M.* 2.20.
II. Teil: Die Oberstufe. 1. Auflage. 1899. [X u. 216 S.] *M.* 3.20.
— — 2. Auflage in 2 Ausgaben
Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. 1902. [XII u. 311 S.] *M.* 3.40.
Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. Unter Mitwirkung von **K. Hupe.** I. Abteilung: Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. 1902. [VIII u. 223 S.] *M.* 2.80.
— II. Abteilung: Synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. 1902. [VIII u. 179 S.] *M.* 2.40.
Ausgabe C. Für Seminare u. Präparandenanstalten. Bearb. von R. Baltin u. W. Maiwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 214 S.] In Lnwd. geb. *M.* 2.20.

Sonder-Abdruck aus „Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen":
Die Lehre von den Koordinaten und Kegelschnitten. Mit zahlreichen Textfiguren. [III u. 52 S.] gr. 8. kart. n. *M.* 1.—

——— und **M. Kutnewsky**, Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. In 2 Teilen.

Ausgabe A. Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. I. Teil. [VIII u. 315 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. *M.* 2.80.
II. Teil: Für die oberen Klassen der Gymnasien. [VIII u. 347 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. *M.* 3.20.
Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. I. Teil. [VIII u. 289 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. *M.* 2.60.
II. Teil: [VIII u. 360 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. *M.* 3.40.
Ausgabe C. Für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von R. Baltin und W. Maiwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 336 S.] In Lnwd. geb. *M.* 3.—
Ausgabe für Präparandenanstalten. Bearbeitet von R. Baltin und F. Segger. [VI u. 316 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. *M.* 3.20.

——— Ergebnisse zu beiden Sammlungen (Ausgabe A *M.* —.80; Ausgabe B *M.* —.60) nur gegen Einsendung des Betrages direkt vom Verlage zu beziehen. Ausgabe für Präparandenanstalten *M.* 1.40.

Müller, Prof. H., Oberlehrer am Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg und Prof. **F. Pietzker**, Oberlehrer am Gymnasium zu Nordhausen, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky. Mit Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers.

Ausgabe A. Für Gymnasien. [VIII u. 244 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 2.40
Ausgabe B. Für reale Anstalten und Reformschulen. [VIII u. 274 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 2.60

Ergebnisse zu beiden Ausgaben *M.* 1.20 nur gegen Einsendung des Betrages direkt vom Verlage zu beziehen.

Müller, Prof. Dr. **Carl Heinr.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M. und Prof. **Otto Presler**, Oberlehrer a. d. Städt. Oberrealschule zu Hannover, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.

Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren im Text. [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 4.—

Ausgabe B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren im Text [VI u. 138 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 2.—

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium u. dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie u. Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.—, geb. *M.* 8.60.

I. Teil. Trigonometrie. 4., verb. Aufl. [X u. 250 S.] 1894. geh. *M.* 4.—, geb. *M.* 4 80.

II. — Stereometrie. 4., verb. Aufl. bearb. v. A. Much. [VIII u. 194 S.] 1897. geh. *M.* 3.—, geb. *M.* 3.80.

—— Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 2.80, geb. *M.* 4.10.

I. Teil. Trigonometrie. 4. Aufl. [78 S.] 1894. geh. *M.* 1.80, geb. *M.* 2.50.

II. — Stereometrie. 4. Aufl. bearb. v. A. Much. [58 S.] 1897. geh. *M.* 1.—, geb. *M.* 1.60.

—— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. *M.* 1.20.

Rudio, Dr. **F.**, Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. 3. Auflage. [X u. 186 S.] gr. 8. 1902. geb. *M.* 3.—

—— u. Ganter, analyt. Geometrie d. Ebene, siehe: Ganter u. Rudio.

Särchinger, E. und Dr. **V. Estel**, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Chemnitz, Aufgabensammlung für den Rechen-Unterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 2. verbesserte Auflage. 3 Hefte. gr. 8. 1899. kart.

I Heft. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 91 S.] *M.* 1.—

II. — Bruchrechnung. [104 S.] *M.* 1.20.

III. — Schlußrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontorechnung. [70 S.] *M.* —.80.

(Resultate hierzu nur durch die Verlagsbuchhandlung.)

Schülke, Dr. **A.**, Gymn.-Professor in Osterode, O.-Pr., Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. [X u. 194 S.] Mit 45 Fig. im Text. 1902. In Leinwand geb. *M.* 2.20.

—— vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Vierte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. 1903. Steif geh. n. *M.* —.60, in Leinwand geb. n. *M.* —.90.

Schuster, Dr. **M.**, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg. geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie, Planimetrie — Stereometrie — ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv-analytischer Methode bearb.

Ausgabe A. Für Vollanstalten. In 3 Teilen:

1. Teil: Planimetrie. [VIII u. 147 S.] gr. 8 Mit 2 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1899. In Leinwand geb. *M.* 2.— .
Auflösungen dazu *M.* —.60. (Nur an Lehrer vom Verlage.)

2. Teil: Trigonometrie. [VII u. 112 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1903. In Leinwand geb. *M.* 1.60.
Auflösungen dazu *M.* 1.60. (Nur an Lehrer vom Verlage.)

3 Teil: Stereometrie. [VII u. 80 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1901. In Leinwand geb. *M.* 1.40.
Auflösungen dazu *M.* 1.40. (Nur an Lehrer vom Verlage.)

Ausgabe B. Für Progymnasien und Realschulen. [VII u. 111 S.] Mit 2 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1900. In Leinwand geb. *M.* 1.60.

Ausgabe C. Für Mittelschulen. Bearb. unter Mitwirkung von **Dr. Bieler**, Rektor der städt. Knabenmittelschule zu Kottbus. [VIII u. 88 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1901. In Leinwand geb. *M.* 1.40.

